FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE
12-D-23
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine

NAZIONALE
B. Prov.
11
788
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

B. Prov.
II
788,

Digitized by Google

609968

Geometrie der Stellung

NAPOLI

oder

über die Anwendung der Analyſis auf Geometrie

von

L. N. M. Carnot

Mitgliede des Nationalinſtituts, der Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Dijon u. ſ. w.

überſetzt

von

H. C. Schumacher

Auſserordentlichem Profeſſor der Aſtronomie zu Kopenhagen.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΚΑΘΑΡΜΑΤΑ ΨΥΧΗΣ.

Zweyter Theil.

Mit 6 Kupfern.

Altona,
bey J. F. Hammerich.
1810.

Vorrede.

Der zweyte Theil der Geometrie der Stellung enthält auſser dem, was von dem Hauptwerke noch nicht überſetzt war, das Mémoire über die Entfernungen 5 beliebig im Raume angenommener Punkte, und die Theorie der Transverſalen. Beydes habe ich auf Verlangen des Verfaſſers beygefügt.

Das Mémoire enthält eine vollſtändige Behandlung der dreyeckigten Pyramide, Formeln, die freylich nicht zur numeriſchen Auflöſung geſchickt ſind, indeſſen, wenn dies gefordert würde, in den meiſten Fällen, durch Umformungen geſchmeidig gemacht werden können.

Die Theorie der Transverſalen hätte eigentlich in das Hauptwerk verwebt werden ſollen, indeſſen hielt ich es für unbeſcheiden, eine Arbeit zu übernehmen, die der Verfaſſer (ſo ſcheint es aus einem Briefe) ſich ſelbſt vorbehält.

Statt meiner Anmerkungen, die ich füglich unterdrücken kann, um nicht zu wiederhohlen, was ſchon von dem Recenſenten in

den Heidelberger Jahrbüchern gesagt ist, habe ich dem Werke Zusätze gegeben, von denen ich die meisten der freundschaftlichen Güte des Herrn Professor Gauss verdanke.

Es wäre thörigt, was dem Geometer Deutschlands zugehört, namentlich ausheben zu wollen — deutlich genug ist des Meisters Stempel auch Seinen Erhohlungen aufgedrückt — nur für die, welche den Zufall scheuen, der die Suchenden auf eine meiner Arbeiten führen könnte, bemerke ich, dass I, II, V, VI, VII, von Ihm sind.

Ehe ich schliesse, muss ich den Vorwitz des Setzers oder Correctors rügen, der am Ende des ersten Theils, statt der Worte:

„sonst habe ich nur folgende erhebliche „Schreib - und Druckfehler bemerkt:"

sich unterfing

„sonst habe ich nur folgende erhebliche „Schreibfehler bemerkt;"

abzudrucken, auch gegen meine, und meines Herrn Verlegers Erinnerung fortfuhr, das k an die Stelle des c zu setzen. Ein flüchtiger Blick auf das Verzeichniss der Fehler zeigt, wie viele darunter Druckfehler sind.

Altona, d. 22. Jun. 1810.

Schumacher.

Vierter Abſchnitt.

Verhältniſſe, die in einem Syſtem von graden Linien ohne goniometriſche Funktionen gefunden werden können. Trigonometriſche Unterſuchungen über Figuren, die in einer Ebene, oder auf der Fläche der Kugel gezogen ſind; verſchiedene Eigenſchaften der Vielecke, und der Polyeder.

187. Schon oben haben wir bemerkt, daſs goniometriſche Funktionen nur, um Winkel mit Linien vergleichen zu können, erfunden ſind. Man muſste Mittelquantitäten, weder Winkel, noch Linien, ſuchen, um für beyde heterogene Theile einen Maaſsſtab zur Vergleichung zu haben. Dieſe Mittelquantitäten nun drücken die Zahl der Theile des Durchmeſſers aus, welche die Sehne enthält, auf der ein in dem Umkreis beſchriebener Winkel ſteht, nach der Zahl der Theile deſſelben Umkreiſes, die der Bogen enthält, der dieſen Winkel miſst, ſo daſs die Rechnung auf Vergleichung abſtrakter Zahlen zurückgebracht wird.

Ebendaher folgt, dafs ihr Gebrauch nur dann nothwendig wird, wenn man den Werth eines Winkels aus dem Werthe einer oder mehrerer Linien, oder umgekehrt, finden foll. Mein Vorfatz hier ift, die Fälle zu unterfuchen, wo die Gegebenen fo befchaffen find, dafs man die Winkel ohne Linien, die Linien ohne Winkel finden kann. Das Interessante diefer Aufgabe liegt darin, dafs die Rechnung mit goniometrifchen Funktionen, theoretifch genommen, nur als Näherungsrechnung betrachtet werden darf.

Der allgemeine Grundfatz hierbey ift:

In jeder Figur, die allein mit Lineal und Zirkel conftruirt werden kann, ohne den eingetheilten Kreis zu gebrauchen, können alle Linien ohne Dazwifchenkunft der Winkel berechnet werden; im Gegentheil in jeder Figur, die allein durch Lineal und den eingetheilten Kreis entworfen wird, ohne den Zirkel zu gebrauchen, können alle Winkel ohne Hülfe der Linien berechnet werden. So kann man im erften Fall alle Seiten der Figur, im zweyten Fall alle ihre Winkel erhalten, ohne goniometrifche Funktionen zu gebrauchen.

Es ift nemlich klar, dafs man das Refultat graphifcher Operationen auch durch Schlüffe aus den Gegebenen erhalten kann. Nun find im erften Fall alle Gegebenen, Linien, im zweyten, Winkel.

188. Wir wollen annehmen, man kenne keinen Winkel einer Figur, hingegen habe man unter den

Seiten oder Lineärquantitäten genug Gegebene, um daraus alle übrigen Lineärquantitäten zu beſtimmen. Hier wird man jede durch die Regeln der Trigonometrie finden, indem man erſt durch Gleichungen, die zwischen Seiten und Winkeln der Figur beſtehenden Verhältniſſe ausdrückt, dann durch Algebra dieſe Gleichungen verbindet, um diejenigen Unbekannten, die verſchwinden ſollen, zu eliminiren. Nach der Annahme ſind in dieſem Fall alle Angulärquantitäten Unbekannte, ſie müſſen alſo aus der Endgleichung für jede der geſuchten Lineärquantitäten verſchwinden, und dieſe Endgleichung kann nur Lineärquantitäten enthalten. Eben dieſe will ich direkt, ohne Dazwiſchenkunft der Angulärquantitäten ſuchen, die doch eigentlich nur eine Nebenrolle bey der Rechnung ſpielen, indem man ſie, nachdem ſie eingeführt ſind, am Ende wieder wegſchaffen muſs, um das geſuchte Reſultat zu erhalten.

Kennt man keine Linie der Figur, aber genug Winkel, um daraus die andern beſtimmen zu können, ſo tritt daſſelbe Verfahren, nur umgekehrt, ein.

So iſt mein Zweck, beſonders die Verhältniſſe zu finden, die unter den Linien einer Figur von der einen, und unter den Winkeln derſelben Figur von der andern Seite beſtehen. Ich habe ſchon zum Theil dieſe Betrachtungen zu meinem Briefe an Boſſut (hinter deſſen Geometrie) bekannt gemacht, hier erhalten ſie nur mehr Entwickelung.

Zuerſt wollen wir Winkel ohne Linien beſtimmen.

Vier und zwanzigſte Aufgabe.

189. **Drey grade Linien ſind in einer Ebene gezogen, man kennt die Winkel, welche die Richtungen zweyer von ihnen, mit der Richtung des dritten machen, und ſoll den Winkel finden, den die Richtungen der beyden erſten mit einander machen.**

Wir wollen, wenn es nöthig iſt, die 3 Linien verlängern, bis ſie ein Dreyeck bilden. Man ſieht leicht, daſs jeder Winkel dieſes Dreyecks entweder einem der Winkel gleich iſt, den die beyden Richtungen bilden, die ſich in ſeinem Scheitelpunkte durchſchneiden, oder deſſen Supplement. Dieſs erfährt man gleich aus den Richtungen, die durch die Anordnung der Buchſtaben, die ſie bezeichnen, angezeigt ſind. (87.) Setzt man alſo die Summe dieſer 3 Winkel $= 2\pi$, und ſetzt in dieſe Gleichung für jeden entweder den Winkel der ſich durchſchneidenden Richtungen oder deſſen Supplement, ſo erhält man die Gleichung des erſten Grades, die den geſuchten Winkel giebt.

Es ſollen z. B. die Richtungen der 3 Linien $\overline{mn}$, $\overline{pq}$, $\overline{rs}$ (Fig. 65. 66.) ſeyn, man kennt die Winkel $\overline{mn}\hat{}\overline{rs}$, $\overline{pq}\hat{}\overline{rs}$, und ſucht $\overline{mn}\hat{}\overline{pq}$.

Ich betrachte das Dreyeck ABC, das durch die 3 Richtungen gebildet wird, und ſehe,

1) daſs der Winkel $B\hat{A}C = \overline{mn}\hat{}\overline{pq}$, alſo der geſuchte iſt;

2) daſs der Winkel $A\hat{B}C$ das Supplement von

dem Winkel $n\hat{B}C$ ist, den die Richtung $\overline{mn}$, mit der Richtung $\overline{rs}$ bildet; also

$$A\hat{B}C = 2\pi - \overline{mn}\hat{\ }\overline{rs};$$

3) endlich, dass $A\hat{C}B$ der Scheitelwinkel von sCq ist, also $A\hat{C}B = \overline{pq}\hat{\ }\overline{rs}$.

Daraus erhält man

$2\pi = \overline{mn}\hat{\ }\overline{pq} + 2\pi - \overline{mn}\hat{\ }\overline{rs} + \overline{pq}\hat{\ }\overline{rs}$ oder

$\overline{mn}\hat{\ }\overline{pq} = \overline{mn}\hat{\ }\overline{rs} - \overline{pq}\hat{\ }\overline{rs}$, was man finden sollte.

190. Durch einen Punkt A in der Ebene der 3 gegebenen Richtungen, wollen wir für jede eine Parallellinie ziehen, und die in demselben Sinn geht. Ist dieß geschehen, so erkennt man leicht den Ausdruck des gesuchten Winkels, in Werthen der beyden andern, und man wird sehen, dass er nothwendig immer, entweder die Summe dieser beyden andern, oder ihre Differenz, oder die Summe ihrer Supplemente seyn muss.

Die 3 Richtungen sollen (Fig. 67. 68. 69.) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ seyn, $B\hat{A}C$ sey der gesuchte Winkel. Hier sind 3 Fälle möglich:

1) Wenn die Linie $\overline{AD}$ (Fig. 67.) in $B\hat{A}C$ gezogen ist, dann ist die Summe der beyden andern $\overline{AB}\hat{\ }\overline{AD}$, $\overline{AC}\hat{\ }\overline{AD}$.

2) Wenn $\overline{AD}$ nicht selbst, aber ihre Verlängerung $\overline{AD'}$ in $B\hat{A}C$ gezogen ist (Fig. 68.), dann ist $B\hat{A}C = B\hat{A}D' + CAD'$ d. h. gleich der Summe der Supplemente der beyden andern Winkel.

3) Wenn weder $\overline{AD}$ noch $\overline{AD'}$ in $\overline{BAC}$ gehen (Fig. 69.), dann ist dieser Winkel offenbar der Unter-

ſchied der beyden gegebenen Winkel. Daraus läſst ſich alſo im Allgemeinen ableiten

Erſter Lehrſatz.

Die Winkel, welche durch die Richtungen dreyer graden Linien in einer Ebene gebildet werden, ſind ſo, daſs jeder von ihnen entweder der Summe der beyden andern gleich iſt, oder ihrem Unterſchiede, oder der Summe ihrer Supplemente.

191. Wir wollen uns nun irgend ein Syſtem von graden Linien vorſtellen, die in einer Ebene gezogen ſind. Man ſoll in dieſer Ebene noch eine neue grade Linie oder Transverſale ziehen, die alle andern ſchneidet, und alle Winkel kennen, die durch die Richtung dieſer Transverſale, und durch die Richtungen der andern graden Linien des Syſtems gebildet werden; dann verlangt man die Winkel zu kennen, die aus der Combination zweyer Richtungen dieſer graden Linien entſtehen können.

Hier muſs man nach der Reihe alle Dreyecke betrachten, die von der Transverſale, und je zwey der andern Linien des Syſtems gebildet werden, ſo findet man wie bey der vorigen Aufgabe den Winkel, den die Richtungen der beyden letzten Linien bilden.

Derſelbe Fall träte ein, wenn die Winkel gegeben ſind, welche eine feſte Transverſale mit den Richtungen der Seiten eines Vielecks bildet, und man die Winkel des Vielecks ſucht. Betrachtet man hier das

Dreyeck, das die feſte Grundlinie (die Transverſale) und zwey auf einander folgende Seiten des Vielecks bilden, ſo findet man wie vorher den eingeſchloſſenen Winkel.

192. Hat man n grade Linien in einer Ebene, ſo bilden ſie, zu zweyen genommen $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Winkel, wo man die $\measuredangle$, welche durch den Durchſchnitt zweyer Linien entſtehen, nur für einen rechnet. Von dieſen $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Winkeln ſollen $n-1$ von einander unabhängige bekannt ſeyn, (alſo keine Scheitelwinkel, Supplemente, 3 Winkel in einem Dreyecke,) ſo wird man immer alle anderen, ohne goniometriſche Punktionen anzuwenden, durch bloſse Additionen und Subtraktionen finden können. Dazu braucht man nur unbeſtimmt alle dieſe Linien zu verlängern, und in den Dreyecken, die aus ihrem Durchſchnitt entſtehen, bildet man vermöge des Satzes, daſs alle 3 Winkel, 2 Rechten gleich ſind, ſoviel unabhängige Gleichungen, als man braucht, um die Zahl $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ voll zu machen.

Offenbar ſind alle dieſe Gleichungen vom erſten Grade.

193. Daraus folgt, daſs, wenn in 2 correlativen Figuren, wovon jede n grade Linien hat, $n-1$ Winkel, einzeln genommen einander gleich ſind, auch die andern correſpondirenden Winkel dieſer Figuren einander gleich ſeyn werden.

Dieſe Bemerkung dient, um leicht eine zahlreiche Claſſe von Aufgaben aufzulöſen, die ein Gegenſtand der Anwendung der Algebra auf Geometrie ſind. Man ſoll hier nemlich graphiſche Verrichtungen finden, die gewiſſen Bedingungen Genüge leiſten. Sind dieſe Bedingungen ſo einfach, daſs man leicht durch Syntheſis allein die geſuchte Figur conſtruiren kann, ſo bedarf man nicht der analytiſchen Hülfsmittel. Aber kann man die Figur ſelbſt nicht conſtruiren, wohl aber eine ähnliche, ſo wäre es leicht die Aufgabe auf die vorige zurückzubringen, denn aus der ähnlichen Figur findet man die Verhältniſſe der Linien in der geſuchten Figur. Man braucht alſo nur eine zu kennen, um alle andern zu haben. Eine muſs man aber wenigſtens bey jeder Aufgabe kennen.

194. Man ſoll z. B. ein Quadrat in einem gegebenen Dreyecke beſchreiben. *ABC* (Fig. 70. 71.) ſey das gegebene Dreyeck, *MNOP* das geſuchte Quadrat. Obgleich ich nicht unmittelbar die Figur *ABCMNOP* beſchreiben kann, die den Bedingungen Genüge leiſtet, ſo kenne ich doch alle ihre Winkel, weil nach der Annahme $\overline{MN}$ parallel mit, und $\overline{MO}$, $\overline{NP}$ ſenkrecht auf der graden gegebnen Linie $\overline{BC}$ ſind. Da ich nun auch aus den Bedingungen der Aufgabe weiſs, daſs $\overline{MO} = \overline{OP}$, ſo kann ich offenbar eine Figur beſchreiben, die der geſuchten ähnlich iſt, und die durch bloſse Proportionen die Theile der geſuchten giebt.

Eben ſo würde man verfahren, wenn die einzuſchreibende Figur kein Quadrat, ſondern z. B. irgend ein gegebenes Viereck *MOPK* wäre, auch wenn man

einen Würfel in einer Triangularpyramide beſchreiben ſollte.

Wir kommen im 5. Abſchnitte auf mehrere ſolche Aufgaben zurück.

195. Wenn man in einer Figur genug Winkel kennt, um die andern daraus ohne goniometriſche Funktionen zu beſtimmen, und in dieſer Figur neue Linien parallel oder ſenkrecht auf die urſprünglichen zieht, ſo kann man eben ſo die neuen dadurch entſtandenen Winkel, ohne goniometriſche Funktionen, (nach 190.) finden. Das wäre aber nicht der Fall, wenn man Diagonalen zöge; die ſo entſtandenen Winkel müſſen durch Hülfe goniometriſcher Funktionen gefunden werden. Daher nimmt man bey Auflöſung goniometriſcher Aufgaben durch Algebra, ſoviel als möglich die Hülfslinien parallel oder ſenkrecht auf die urſprünglichen, weil man ſo die neuentſtandenen Winkel den ſchon bekannten gleich hat.

Genug von den Winkeln, die ohne Hülfe der Linien gefunden werden, wir wollen jetzt zu den Linien gehn, die man ohne Hülfe der Winkel beſtimmen kann.

196. Man ſtelle ſich ein Syſtem von graden, in einer Ebene gezogenen Linien vor. Wir wollen annehmen, daſs man, ohne einen Winkel zu kennen, unter dieſen graden Linien, oder den Segmenten, die aus ihren Durchſchnitten entſtehen, genug Gegebene habe, um jeden Theil der Figur beſtimmen zu können; ſo erhellt, daſs alle anderen Linien und Segmente der Figur ohne Hülfe der Winkel zu finden ſind,

weil ſie, ohne daſs dieſe Winkel gegebne waren, conſtruirt wurden.

Es kommt alſo nur darauf an, ſie in jedem beſondern Falle zu finden. Wir wollen bey dem Dreyecke der einfachſten Figur anfangen.

BGA (Fig. 72.) ſey ein beliebiges Dreyeck. Aus dem Scheitel B eines der Winkel ziehe man eine Transverſale $\overline{BC}$ nach einem gegebenen Punkte C der Grundlinie. Man verlangt den Werth dieſer Linie $\overline{BC}$ ohne Winkel in die Rechnung zu ziehen, weil man bey der Conſtruktion keinen Winkel braucht.

Ich ſenke aus B das Perpendikel $\overline{Bm}$ auf $\overline{GA}$, und aus A das Perpendikel $\overline{An}$ auf $\overline{BG}$. Dann giebt das rechtwinklichte Dreyeck BCm

$$\overline{BC}^2 = \overline{Bm}^2 + \overline{Cm}^2 = \overline{Bm}^2 + (\overline{Gm} - \overline{GC})^2 = \overline{Bm}^2 + \overline{Gm}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{Gm}.\overline{GC}$$

da nun $\overline{Bm}^2 + \overline{Gm}^2 = \overline{BG}^2$ ſo wird daraus

$$\overline{BC}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{Gm}.\overline{GC} \qquad (A)$$

Es iſt auch $\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\overline{Gn}.\overline{BG}$

Die ähnlichen Dreyecke AGn, BGm geben

$\overline{GA} : \overline{Gn} = \overline{BG} : \overline{Gm}$ oder $\overline{GA}.\overline{Gm} = \overline{Gn}.\overline{BG}$

daher

$$\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\overline{GA}.\overline{Gm} \qquad (B)$$

Multiplicirt man nun die Gleichung (A) durch $\overline{GA}$, und die Gleichung (B) durch $\overline{GC}$, und zieht dieſe von der erſten ab, ſo erhält man nach Reduktion

$$\overline{BC}^2.\overline{GA} = \overline{BG}^2.\overline{CA} + \overline{BA}^2.\overline{GC} - \overline{GA}.\overline{GC}.\overline{AC} \qquad (C)$$

Dividirt man mit $\overline{GA}$, so kann man daraus den Werth von $\overline{BC}$ ziehen. So erhalten wir den folgenden Satz.

Zweyter Lehrsatz.

In jedem Dreyecke, wenn man aus dem Scheitel eines Winkels, eine Transversale, auf die gegenüberstehende Grundlinie selbst, nicht auf ihre Verlängerung zieht, ist das Quadrat dieser Transversale, multiplicirt durch die Grundlinie, gleich der Summe der Quadrate der beyden andern Seiten, von denen jedes mit dem gegenüberstehenden Segment der Grundlinie multiplicirt ist, weniger der Grundlinie mit dem Produkt ihrer beyden Segmente multiplicirt.

Dieſs ist der Hauptlehrsatz bey solchen Untersuchungen.

Um ein Beyspiel zu geben, mag die Transversale $\overline{BC}$, $\overline{GA}$ in der Mitte schneiden, so ist $\overline{CG} = \overline{CA} = \frac{1}{2}\overline{GA}$. Die Formel giebt also

$$4\overline{BC}^2 = 2\overline{BG}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{GA}^2$$

Theilt die Transversale $\overline{BC}$ den Winkel $G\hat{B}A$ in 2 gleiche Theile, so verhalten sich bekanntlich die Segmente der Grundlinie, wie die umliegenden Seiten, also

$$\overline{CA} \cdot \overline{GB} = \overline{CG} \cdot \overline{BA}.$$

Setzt man diesen Werth in die Formel (C), so erhält man

$$\overline{BC}^2 . \overline{GA} = \overline{CG} . \overline{BA} . (\overline{BG} + \overline{BA}) - \overline{GA} . \overline{CG} . \overline{AC}$$

Aber die vorige Proportion giebt auch

$$\overline{CG} + \overline{CA} \text{ oder } \overline{GA} : \overline{CG} = \overline{GB} + \overline{BA} : \overline{GB}$$

Zieht man hieraus den Werth von $\overline{CG}$ und substituirt ihn zu der Gleichung, so erhält man die bekannte Formel

$$\overline{GA} . \overline{BC}^2 = \overline{GB} . \overline{BA} - \overline{CG} . \overline{CA}$$

197. Im Dreyecke ABC (Fig. 73.) sey der Winkel $B\hat{A}C$ durch den Transversale $\overline{AH}$ in 2 gleiche Theile getheilt, so hat man

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

Nun sey $\overline{AH'}$ senkrecht auf $\overline{AH}$, so sieht man leicht, dass man auch

$$\overline{BH'} : \overline{CH'} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

hat, also ist

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}$$

198. Nach (196.) hat man

$$\overline{AH}^2 = \overline{AB} . \overline{AC} - \overline{BH} . \overline{CH}$$

dagegen hat man

$$\overline{AH'}^2 = \overline{BH'} . \overline{CH'} - \overline{AB} . \overline{AC}$$

Es ist nemlich nach (196.)

$$\overline{AC}^2 . \overline{BH'} = \overline{AB}^2 . \overline{CH'} + \overline{AH'}^2 . \overline{BC} - \overline{BH'} . \overline{CH'} . \overline{BC}$$

Setzt man nun in das erste Glied dieser Gleichung für BH', $\frac{\overline{CH'} . \overline{AB}}{\overline{AC}}$ und versetzt, so hat man

$$\overline{CH'} . \overline{AB} (\overline{AC} - \overline{AB}) + \overline{BH'} . \overline{CH'} . \overline{BC} = \overline{AH'}^2 . \overline{BC}$$

Aus der vorigen Proportion

$$\overline{BH'} : \overline{CH'} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

zieht man

$$\overline{BH'} - \overline{CH'} : \overline{CH'} = \overline{AB} - \overline{AC} : \overline{AC}$$

oder $\overline{CH'} = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB} - \overline{AC}}$

durch Subſtitution dieſes Werthes von $\overline{CH'}$ und Diviſion mit $\overline{BC}$ erhält man endlich

$$\overline{AH'}^2 = \overline{BH'} \cdot \overline{CH'} - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

199. Addirt man $\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{BH} \cdot \overline{CH}$

und $\overline{AH'}^2 = \overline{BH'} \cdot \overline{CH'} - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

ſo hat man $\overline{AH}^2 + \overline{AH'}^2$ d. h. $\overline{HH'}^2 = \overline{BH'} \cdot \overline{CH'} - \overline{BH} \cdot \overline{CH}$.

200. $\overline{AH'}$ iſt auf $\overline{AH}$ ſenkrecht angenommen, wenn man alſo über $\overline{HH'}$ als Durchmeſſer einen Kreis beſchreibt (Fig. 74.), ſo geht er durch den Punkt A. Alſo umgekehrt, wenn man über einer graden Linie $\overline{HH'}$ einen Kreis beſchreibt, und aus irgend einem Punkte A, mit dieſem Umkreiſe die Linien $\overline{AH}$, $\overline{AH'}$ zieht, dann die Winkel $B\hat{A}H = C\hat{A}H$ macht, ſo ſind die Punkte B, C, ſo beſtimmt, daſs

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}.$$

201. Sind alſo 2 feſte Punkte, oder Brennpunkte B, C gegeben, und man ſucht den geometriſchen Ort aller Punkte, deren Entfernungen zu dieſen beyden Punkten in gegebenem Verhältniſſe ſind, ſo würde man der Aufgabe Genüge leiſten, wenn man erſt die Linie BC, in dem gegebenen Verhältniſſe in H theilte, dann auf der Verlängerung dieſer Linie, einen andern Punkt H' ſuchte, ſo daſs $\overline{BH'}$, $\overline{CH'}$ auch in demſelben Verhältniſſe wären. Der Kreis über $\overline{HH'}$ wird dann der geſuchte geometriſche Ort ſeyn.

Offenbar haben alle Punkte einer Kugel, die $\overline{HH'}$ zum Durchmeſſer hat, dieſelbe Eigenſchaft.

202. Weil $B\hat{A}H = C\hat{A}H$, ſo iſt der Umkreis HAH', auch der geometriſche Ort aller Punkte, die wie A die Eigenſchaft haben, daſs, wenn man von ihnen nach den 3 feſten Punkten B, H, C, die Linien $\overline{AB}$, $\overline{AH}$, $\overline{AC}$ zieht, der Winkel $B\hat{A}H$ immer $= C\hat{A}H$ bleibt, oder mit andern Worten, daſs der Winkel $B\hat{A}C$ immer durch die Linie $\overline{AH}$ in zwey gleiche Theile getheilt wird.

203. Ich kehre zum Lehrſatz (196) zurück.

Wir haben, um die geſuchte Transverſale $\overline{BC}$ zu finden, keine goniometriſche Funktionen gebraucht, denn alle Gegebenen waren Linien, und ſo war es unnöthig, Winkel in die Rechnung zu bringen.

Doch war es möglich, und in den meiſten Fällen iſt es ſogar bequemer. So haben wir aus den bekannten Eigenſchaften des Dreyecks

$$\overline{BC}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{BG}\,.\,\overline{GC}\,.\,cof\,B\hat{G}C$$
$$\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\overline{AG}\,.\,\overline{BG}\,.\,cof\,B\hat{G}C$$

Multiplicirt man die erſte Gleichung mit $\overline{GA}$, die andere mit $\overline{GC}$, ſo kommt man nach leichten Reduktionen auf das vorige Reſultat.

204. Man überſieht leicht, daſs, wenn der Punkt C, auſserhalb G in C' fällt, $\overline{GC}$ invers wird, eben ſo wenn er auſserhalb A in C'' fällt, wird $\overline{AC}$ invers.

205. Die Formel enthält die 3 Seiten des Dreyecks und die zwey Segmente der Grundlinie, von denen man eins eliminiren kann, wenn man dafür die

Grundlinie weniger dem andern ſetzt, es läſst ſich alſo darnach folgende Aufgabe löſen:

Es ſind von den 3 Seiten eines Dreyecks, der Transverſale aus dem einen Winkel auf die gegenüberſtehende Seite, und den beyden Segmenten dieſer Seite 4 unabhängig von einander gegeben, man ſoll die beyden Unbekannten finden.

Aber wir können durch denſelben Gang die allgemeinere Aufgabe löſen, wo die Transverſale ſtatt aus einem Winkel aus irgend einem andern Punkte gezogen wird.

Fünf und zwanzigſte Aufgabe.

206. Wenn von den 6 Seiten, aus denen 2 Dreyecke beſtehen, die einen gemeinſchaftlichen oder gleichen Winkel haben, irgend 5 gegeben ſind, die 6te zu finden.

Die beyden Dreyecke, die einen gemeinſchaftlichen Winkel haben, ſollen BGA, DGC ſeyn (Fig. 72.). Aus D wollen wir auf GC das Perpendikel $\overline{Dm'}$, und aus A das Perpendikel $\overline{An}$ ſenken.

Das rechtwinklichte Dreyeck DCm' giebt

$$\overline{DC}^2 = \overline{Dm'}^2 + \overline{Cm'}^2 = \overline{Dm'}^2 + (\overline{GC} - \overline{Gm'})^2$$
$$= \overline{Dm'}^2 + \overline{Gm'}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{Gm'}\,.\,\overline{GC}$$

oder für $\overline{Dm'}^2 + \overline{Gm'}^2$, $\overline{DG}^2$ geſetzt

$$\overline{DC}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{Gm'}\,.\,\overline{GC} \qquad (A.)$$

Eben ſo hat man

$$\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\overline{GB}\,.\,\overline{Gn}$$

Nun ist aber aus den ähnlichen Dreyecken DGm', AGn

$$\overline{Gn} = \frac{\overline{GA} \cdot \overline{Gm'}}{\overline{DG}}$$

also

$$\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\frac{\overline{GA} \cdot \overline{Gm'} \cdot \overline{GB}}{\overline{DG}} \quad \text{(B)}$$

Multiplicirt man (A) mit $\overline{CA} \cdot \overline{BG}$ und (B) mit $\overline{DG} \cdot \overline{GC}$, um $\overline{Gm'}$ zu eliminiren, so erhält man die gesuchte Gleichung, welche nur die 6 Seiten der Dreyecke enthält

$$(\overline{BG}^2 + \overline{GA}^2 - \overline{BA}^2) \cdot \overline{GD} \cdot \overline{GC} = (\overline{DG}^2 + \overline{GC}^2 - \overline{DC}^2) \cdot \overline{GB} \cdot \overline{GA}.$$

207. Da $\overline{AC} = \overline{GA} - \overline{CA}$, $\overline{BD} = \overline{GB} - \overline{GD}$, so werden die Segmente $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ bekannt seyn, wenn die 6 andern Quantitäten des Systems bekannt sind, und umgekehrt, wenn diese beyden Quantitäten und 3 von den ersten bekannt sind, findet man die andern durch die beyden vorhergehenden Gleichungen, und durch die vorhergefundene Formel. Sind also überhaupt in einem Dreyecke, das durch eine Transversale geschnitten wird, 5 von den 8 dabey vorkommenden Linien gegeben, die aber unabhängig von einander seyn müssen, so kann man die 3 andern durch die vorige Formel finden.

208. Ist $\hat{BGA} = 180° - \hat{BGC}$ so hat man

$$(\overline{BG}^2 + \overline{GA}^2 - \overline{BA}^2) \cdot \overline{GD} \cdot \overline{GC} = (\overline{DC}^2 - \overline{DG}^2 - \overline{GC}^2) \cdot \overline{GB} \cdot \overline{GA}.$$

209. Nach den Grundsätzen, die wir über Correlation aufgestellt haben, sieht man leicht, dass $\overline{GC}$ invers würde, wenn C ausserhalb von G in C' fiele,

und

und dafs man folglich in der vorigen Formel in dieſem Falle $-\overline{GC}$ ſtatt $+\overline{GC}$ ſehen müſste. Im Urſyſtem nämlich hat man

$$\overline{GC} = \overline{GA} - \overline{CA}$$

im umgeformten $\overline{GC'} = \overline{C'A} - \overline{GA}$

Wenn aber C aufserhalb A nach C'' fiele, ſo würde $\overline{CA}$ invers werden, und folglich müſste man für $\overline{CA}$, $-\overline{CA}$ ſetzen.

Eben ſo wenn der Punkt D, ſtatt zwiſchen B und G zu fallen, aufserhalb G in D' fiele, würde $\overline{GD}$ invers werden (alſo $-DG$ ſtatt DG), fiele er aufserhalb B in G'', ſo würde $\overline{BD}$ invers werden, und folglich wäre da nichts zu verändern, weil $\overline{BD}$ nicht in die Formel kommt.

Wenn zugleich C in C', D in D' fiele, ſo müſste man zugleich

$-\overline{GC}$ für $\overline{GC}$

und $-\overline{DG}$ für $\overline{DG}$ ſetzen,

fiele D in D', und C in C'', ſo würde man $-\overline{DG}$ und $-\overline{CA}$, ſtatt $\overline{DG}$ und $\overline{CA}$ zu ſetzen haben u. ſ. w.

210. Es ſeyen, um ein Beyſpiel zu geben, zwey Dreyecke ABD, ACD (Fig. 75.) in demſelben Kreiſe beſchrieben, und deren Grundlinie dieſelbe Sehne $\overline{AD}$ iſt, da

$$\hat{ACD} = \hat{ABD}$$

ſo haben wir

$(\overline{BA}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2) \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CD} = (\overline{CA}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AD}^2) \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BD}$. alſo

$$\overline{AD}^2 = \frac{(\overline{AB}.\overline{AC} - \overline{BD}.\overline{CD}).(\overline{AC}.\overline{BD} - \overline{AB}.\overline{CD})}{\overline{AB}.\overline{BD} - \overline{AC}.\overline{CD}} \ldots (A)$$

Zieht man $\overline{BC}$, so haben die Dreyecke BAC, BDC, eine gemeinschaftliche Grundlinie $\overline{BC}$ und man hat

$$\overline{BC}^2 = \frac{(\overline{AB}.\overline{BD} - \overline{AC}.\overline{CD})\ (\overline{AC}.\overline{BD} - \overline{AB}.\overline{CD})}{\overline{AB}.\overline{AC} - \overline{BD}.\overline{CD}} \ldots (B)$$

Kennt man also in dem eingeschriebenen Viereck die beyden Diagonalen und 2 entgegengesetzte Seiten, so hat man unmittelbar die beyden andern Seiten.

211. Diese Formeln sind nur auf das Viereck $ABCD$ (Fig. 75.) anwendbar, aber man kann sie auch auf das Viereck (Fig. 76.) anwendbar machen, wenn man sich vorstellt, dass in der ersten Figur der Punkt D sich gegen C längst der Peripherie bewege, bis er über C hinaus gekommen ist. Dann wird $\overline{CD}$ invers und man braucht nur für $\overline{CD}$, $-\overline{CD}$ zu setzen, so erhält man

$$\overline{AD}^2 = \frac{(\overline{AB}.\overline{AC} + \overline{BD}.\overline{CD})\ (\overline{AC}.\overline{BD} + \overline{AB}.\overline{CD})}{\overline{AB}.\overline{BD} + \overline{AC}.\overline{CD}} \ldots (C)$$

$$\overline{BC}^2 = \frac{(\overline{AB}.\overline{BD} + \overline{AC}.\overline{CD}).(\overline{AC}.\overline{BD} + \overline{AB}.\overline{CD})}{\overline{AB}.\overline{AC} + \overline{BD}.\overline{CD}} \ldots (D)$$

woraus man die beyden Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks finden kann, wenn man die 4 Seiten kennt.

212. Nach gehörigen Reduktionen erhält man

$$\overline{AD}.\overline{BC} = \overline{AC}.\overline{BD} + \overline{AB}.\overline{CD} \ldots (E)$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BD} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BD} + \overline{AC} \cdot \overline{CD}} \quad \ldots (F)$$

bekannte Formeln.

Um das, was ich über eingeschriebene Vierecke und Vielecke zu sagen habe, vollständig zu machen, mögen hier zwey dahin gehörige Sätze stehen.

Dritter Lehrsatz.

213. In jedem eingeschriebenem Vierecke verhalten sich die beyden Segmente einer Diagonale, wie die Produkte aus den anliegenden Seiten.

ABDC (Fig. 76.) sey das Viereck, *H* der Durchschnittspunkt der beyden Diagonalen, es soll also

$$\overline{AH} : \overline{DH} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} : \overline{BD} \cdot \overline{DC} \text{ seyn,}$$

und dieß folgt auch leicht, wenn man die beyden Proportionen

$$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{AB} : \overline{CD}$$
$$\overline{CH} : \overline{DH} = \overline{AC} : \overline{BD}$$

mit einander multiplicirt.

Dieser Satz kann unmittelbar auf jedes der eingeschriebenen Vierecke *ABDC*, *ABCD*, *ACDB* angewandt werden, da sie correlativ sind, und der Satz zu einer Gleichung führt, die nur aus 2 Gliedern besteht. Nach (47) ist eine solche unmittelbar auf alle correlative Systeme anwendbar. So giebt das Viereck *ABCD* (dessen Diagonalen *AC*, *BD* und Durchschnittspunkt *G*)

$$\overline{AG} : \overline{CG} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} : \overline{BC} \cdot \overline{CD}$$

Man kann also auch den Lehrsatz so ausdrücken:

Im eingeſchriebenen Vierecke verhalten ſich die beyden Segmente auf jeder Seite, die bis dahin verlängert iſt, wo ſie die gegenüberſtehende trift, zu einander, wie die reſpektiven Produkte aus der anliegenden Seite und Diagonale.

Da $\overline{AH} : \overline{DH} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} : \overline{BD} \cdot \overline{CD}$ ſo iſt auch

$$\overline{AH} + \overline{DH} \text{ oder } \overline{AD} : \overline{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BD} \cdot \overline{CD} : \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

oder $$AH = AD \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BD} \cdot \overline{CD}}$$

Auf ähnliche Art folgt

$$AG = AC \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{AB} \cdot \overline{AD} - \overline{BC} \cdot \overline{CD}}$$

214. Hat man alſo irgend ein eingeſchriebenes Vieleck (Fig. 77.), und kennt man alle ſeine Seiten und Diagonalen, ſo findet man durch den vorigen Satz, alle Segmente auf dieſen Diagonalen, und auf den unbeſtimmt verlängerten Seiten.

Soll man z. B. $\overline{Bq}$ finden, ſo betrachtet man das Viereck $ABDE$, worin alles bekannt iſt. Will man $\overline{mq}$ haben, ſo ſucht man erſt $\overline{Bq}$, und dann $\overline{Bm}$, aus dem Vierecke $ABCE$, und man erhält

$$\overline{Bq} - \overline{Bm} = \overline{mq}$$

R ſoll der Halbmeſſer des Kreiſes ſeyn, ſo haben wir (121)

$$\overline{AE} = 2R \cdot \sin \tfrac{1}{2} \overset{\frown}{AE}$$
$$\overline{AB} = 2R \cdot \sin \tfrac{1}{2} \overset{\frown}{AB} \text{ u. ſ. w.}$$

Man kann alſo auch alle Segmente durch den Halbmeſſer des Kreiſes und Kreisfunktionen ausdrücken.

Vierter Lehrſatz.

215. Es ſey (Fig. 78.) $BCDEFG$ ein eingeſchriebenes Vieleck. Aus einem willkührlich im Umkreiſe angenommnen Punkte A wollen wir zu den beyden nächſten Winkeln G, B, die Sehnen $\overline{AG}$, $\overline{AB}$ ziehen, dann iſt

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{AB}.\overline{AG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}.\overline{AD}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}.\overline{AE}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}.\overline{AF}} + \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}.\overline{AG}}$$

Aus dem Punkte B ziehe ich die Diagonalen BD, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, dann giebt das Viereck $ABCD$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

und mit $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ dividirt

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB} \cdot \overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}$$

Verfährt man eben ſo mit den Vierecken $ABDE$, $ABEF$, $ABFG$, ſo erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB} \cdot \overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB} \cdot \overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB} \cdot \overline{AD}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{AD} \cdot \overline{AE}}$$

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{AB} \cdot \overline{AF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB} \cdot \overline{AE}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AE} \cdot \overline{AF}}$$

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{AB}\,.\,\overline{AG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}\,.\,\overline{AF}} + \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}\,.\,\overline{AG}}$$

Addirt man dieſe Gleichungen und zerſtört die gleichen Glieder, ſo erhält man den geſuchten Lehrſatz, der nur eine Erweiterung der bekannten Eigenſchaft eingeſchriebener Vierecke iſt, auf der er heruht.

216. Der Durchmeſſer des Kreiſes ſey = 1 und

$$\overset{\frown}{AB} = 2a$$
$$\overset{\frown}{ABC} = 2b$$
$$\overset{\frown}{ABCD} = 2c$$
$$\overset{\frown}{ABCDE} = 2d$$
$$\overset{\frown}{ABCDEF} = 2e \text{ u. ſ. w.}$$

ſo haben wir

$$\overset{\frown}{BC} = 2(b-a)$$
$$\overset{\frown}{CD} = 2(c-b)$$
$$\overset{\frown}{DE} = 2(d-c)$$
$$\overset{\frown}{EF} = 2(e-d) \text{ u. ſ. w.}$$

aus (122) iſt

$$\overline{AB} = \mathit{ſin}\ a$$
$$\overline{AC} = \mathit{ſin}\ b$$
$$\overline{AD} = \mathit{ſin}\ c \text{ u. ſ. w}$$

die Gleichung des vorigen Satzes verwandelt ſich alſo in

$$\frac{\mathit{ſin}\,(f-a)}{\mathit{ſin}\,a\,.\,\mathit{ſin}\,f} = \frac{\mathit{ſin}\,(b-a)}{\mathit{ſin}\,a\,.\,\mathit{ſin}\,b} + \frac{\mathit{ſin}\,(c-b)}{\mathit{ſin}\,b\,.\,\mathit{ſin}\,c} + \frac{\mathit{ſin}\,(d-c)}{\mathit{ſin}\,c\,.\,\mathit{ſin}\,d}$$
$$+ \frac{\mathit{ſin}\,(e-d)}{\mathit{ſin}\,d\,.\,\mathit{ſin}\,e} + \frac{\mathit{ſin}\,(f-e)}{\mathit{ſin}\,e\,.\,\mathit{ſin}\,f}$$

eine Formel, die ſchon (139) gefunden ward.

Da dieſe Gleichung für jeden Werth von a ſtatt findet, ſo kann man für a, b, c, d u. ſ. w. $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$, $\pi - d$ u. ſ. w. ſetzen, dann kommt

$$\frac{\sin(f-a)}{\cos a \cdot \cos f} = \frac{\sin(b-a)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(c-b)}{\cos b \cdot \cos c} + \text{u. ſ. w.}$$

217. Man kann alſo allgemein ſchlieſsen, wie auch der Punkt A auf $\overset{\frown}{BG}$ liegen mag, daſs

in jedem eingeſchriebenen Vieleck $BCDEFG$, die Summe der Quotienten jeder Seite, durch das Produkt der beyden Linien, die von einem Punkte des Umkreiſes A nach den Endpunkten gezogen werden, immer dieſelbe bleibt, wo auch der Punkt A ſey, wenn er nur für alle Seiten des Vielecks derſelbe iſt, und man die Seite $\overline{BG}$, die ihre Rückſeite nach A dreht, negativ nimmt.

218. Wir kommen auf unſere allgemeine Theorie zurück. (Fig. 72.) Ich verlängere die Transverſale $\overline{CD}$ bis ſie in F die Seite des Dreyecks ſchneidet und ich nehme mir vor, die Verhältniſſe aufzufinden, die zwiſchen den Linien des neuen Syſtems beſtehen, welches, wie man ſieht, die Vereinigung von 4 graden Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ iſt, d. h. ein vollſtändiges Viereck ohne Diagonalen.

Dazu ziehe ich durch einen Winkel B des Dreyecks BGA die Linie $\overline{Bb}$, parallel der gegenüberſtehenden Seite, und verlängere ſie bis zur Transverſale $\overline{CDF}$ im Punkte b. Dann erhalte ich

$$\overline{Bb} : \overline{GC} = \overline{BD} : \overline{DG}$$
$$\overline{AC} : \overline{Bb} = \overline{AF} : \overline{BF}$$
also $$\overline{AF} . \overline{BD} . \overline{GC} = \overline{AC} . \overline{BF} . \overline{GD}.$$

Wir ſind zu dieſer Formel gekommen, ohne trigonometriſche Funktionen zu gebrauchen, indeſſen kann man auch ſehr leicht durch ſie daſſelbe erhalten.

Unſere Gleichung überſetzt heiſst:

Fünfter Lehrſatz.

219. Man ſchneide die 3 Seiten eines Dreyecks (verlängert, wenn es nöthig iſt) durch eine Transverſale; dann ſind die 6 Segmente je zwey auf jeder Seite, zwiſchen dem Winkel, der die Seite begränzt, und der Transverſale ſo beſchaffen: daſs das Produkt dreyer unter ihnen dem Produkt der 3 andern gleich iſt, wenn man nur die Faktoren ſo wählt, daſs nie zwey in demſelben Produkt vorkommen, die denſelben Winkel des Dreyecks, oder denſelben Punkt der Transverſale zu Endpunkten haben.

Der Satz iſt allgemein, und eben ſo wahr, wenn die Transverſale auſserhalb des Dreyecks geht, und nur die verlängerten Seiten ſchneidet (Fig. 79. 80. 81. 82.).

220. Weil das allgemeine Syſtem aus 4 Linien beſteht, die in derſelben Ebene gezogen ſind, und weil dieſe 4 Linien, zu Dreyen genommen, ein Drey-

eck bilden, deſſen Transverſale die 4te iſt, ſo giebt es im allgemeinen Syſtem 4 Dreyecke

BGA
BFD
FCA
DGC

auf welche man den vorigen Lehrſatz anwenden kann, und die alſo 4 correlative Syſteme bilden, auf die man die Formel des Urſyſtems unmittelbar anwenden kann. Ich ſage unmittelbar; denn da die Formel nur 2 Glieder hat, braucht man keine Zeichenveränderung vorzunehmen.

Wir erhalten alſo gleich folgende Correlation der Conſtruktion (Fig. 72. 79. 80. 81. 82.)

1. Syſtem . . $BGADFC$
2. — $BFDAGC$
3. — $FCADBG$
4. — $DGCBFA$

Wendet man alſo die gefundene Formel auf jedes an, ſo kommt

$$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{GC} = \overline{AC} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{GD}$$
$$\overline{DG} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{FC} = \overline{DC} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{FA}$$
$$\overline{AB} \cdot \overline{FD} \cdot \overline{CG} = \overline{AG} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{CD}$$
$$\overline{CF} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{GA} = \overline{CA} \cdot \overline{DF} \cdot \overline{GB}$$

Die 4te Formel folgt ohnedem ſchon aus den andern.

221. Fügt man zu dieſen 3 Gleichungen noch folgende 4:

$$\overline{BG} = \overline{BD} + \overline{GD}$$
$$\overline{BA} = \overline{FA} - \overline{FB}$$
$$\overline{GA} = \overline{GC} + \overline{CA}$$
$$\overline{CD} = \overline{CF} - \overline{FD}$$

ſo hat man die 7 nöthigen Gleichungen, um in der vorgelegten Figur von den 12 Linien 7 zu finden, wenn die 5 andern unabhängig von einander gegeben ſind. Dieſe Figur iſt nun, wie wir bemerkt haben, ein vollſtändiges Viereck ohne ſeine Diagonalen; alſo giebt der Lehrſatz (219.) die Auflöſung folgender Aufgabe:

Wenn von den 12 Linien, aus denen ein vollſtändiges Viereck ohne Diagonalen beſteht, irgend 5 von einander unabhängige gegeben ſind, die 7 unbekannten zu finden.

222. Durch Multiplication leitet man aus dieſen Formeln folgende ab:

$$\overline{BA}.\overline{BD}.\overline{CF}.\overline{CG} = \overline{BF}.\overline{BG}.\overline{CA}.\overline{CD}$$
$$\overline{AF}.\overline{AG}.\overline{DB}.\overline{DC} = \overline{AB}.\overline{AC}:\overline{DF}.\overline{DG}$$
$$\overline{GB}.\overline{GC}.\overline{FA}.\overline{FD} = \overline{GA}.\overline{GD}.\overline{FB}.\overline{FC}$$

die man auch in folgende Proportionen verwandeln kann:

$$\overline{BF}.\overline{BG}:\overline{CF}.\overline{CG} = \overline{BA}.\overline{BD}:\overline{CA}.\overline{CD}$$
$$\overline{AB}.\overline{AC}:\overline{DB}.\overline{DC} = \overline{AF}.\overline{AG}:\overline{DF}.\overline{DG}$$
$$\overline{GA}.\overline{GD}:\overline{FA}.\overline{FD} = \overline{GB}.\overline{GC}:\overline{FB}.\overline{FC}$$

die alle 3 dieſelbe Eigenſchaft ausdrücken, die erſte für das gewöhnliche Viereck *BDCA*, die zweyte für das Viereck *AFDB* mit einwärts gehendem Winkel, und die dritte für das Viereck *GCFB*, das zwey entgegengeſetzte Dreyecke bildet, man kann alſo folgenden Lehrſatz daraus ableiten:

Sechſter Lehrſatz.

In jedem einfachen Viereck verhält ſich das Produkt der beyden Entfernungen von einem Winkel zu dem Punkte, wo die Seiten, die von dieſem Winkel ausgehen, die gegenüberſtehenden Seiten treffen, zu dem Produkt der beyden Entfernungen, des diagonal gegenüberſtehenden Winkels von eben dieſen Punkten, wie das Produkt der beyden dem erſten Winkel anliegenden Seiten, zu dem Produkte der beyden andern.

223. Zieht man nun noch (Fig. 83. 84. 85.) die 3 Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ des vollkommenen Vierecks, ſo ſieht man leicht, daſs der vorige Satz auch ſo ausgedrückt werden kann:

In jedem vollkommenen Viereck, wenn man eine Diagonale zieht und die zwey einfachen Vierecke vergleicht, denen dieſe Diagonale gemein iſt, verhält ſich das Produkt der beyden Seiten eines dieſer Vierecke, die von einem Endpunkte dieſer Diagonale ausgehen, zum Produkt der beyden andern Seiten deſſelben Vierecks, wie das Produkt der beyden Seiten des andern Vierecks, die vom andern Endpunkt der Diagonale ausgehen, zum Produkt der beyden andern Seiten deſſelben Vierecks.

224. Wir wollen annehmen, daſs die Diagonale $\overline{AD}$ die beyden andern $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ in den Punkten H, K, ſchneide, und die beyden Dreyecke AFK, AGK vergleichen, die auf derſelben Diagonale FG gebildet ſind, und durch AD eine von der andern getrennt, und von den Transverſalen $\overline{BC}$, $\overline{FC}$ geſchnitten werden. Der Lehrſatz giebt uns folgende Gleichungen:

$$\overline{AB} \cdot \overline{DK} \cdot \overline{GF} = \overline{AD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{GK}$$
$$\overline{AD} \cdot \overline{GC} \cdot \overline{FK} = \overline{DK} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{GF}$$

Multiplicirt und reducirt man dieſe Gleichungen, ſo kommt

$$\overline{AB} \cdot \overline{FK} \cdot \overline{GC} = \overline{AC} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{GK}$$

d. h. folgender Lehrſatz:

Siebenter Lehrſatz.

Wenn man aus irgend einem Punkte in der Ebene eines Dreyecks nach den 3 Winkeln Linien oder Transverſalen zieht, und jede ſoweit verlängert, bis ſie die gegenüberſtehende Seite trifft, ſo entſtehen auf jeder Seite 2 Segmente. Das Produkt 3er dieſer Segmente iſt gleich dem Produkte der 3 andern, wenn man ſie nur ſo nimmt, daſs in einem Produkt nicht zwey zuſammen kommen, die durch denſelben Winkel des Dreyecks, oder denſelben Punkt der Transverſale begränzt werden.

225. Wir wollen eine Anwendung auf das Dreyeck BDA machen, deſſen 3 Scheitelpunkte 3 Winkel des Vierecks $BDCA$ ſind. Aus dem Punkte C ziehen

wir nach den Winkeln des Dreyecks die Transverſalen *CB, CD, CA,* wir haben alſo

$$\overline{AF} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{DH} = \overline{AH} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DG}$$

Aber daſſelbe Dreyeck, durch die Transverſale $\overline{FG}$, die durch keinen Winkel geht, geſchnitten, giebt

$$\overline{AK} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DG} = \overline{AF} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{DK}$$

multiplicirt und reducirt man, ſo kommt

$$\overline{AK} \cdot \overline{DH} = \overline{AH} \cdot \overline{DK} \text{ oder}$$

$$\overline{AH} : \overline{DH} = \overline{AK} : \overline{DK} \text{ d. h.}$$

Achter Lehrſatz.

In jedem vollſtändigen Viereck, das ſeine 3 Diagonalen hat, wird jede dieſer Diagonalen von den beyden andern in proportionalen Segmenten geſchnitten.

226. Die Flächen der Dreyecke *BAC*, *BDC*, die die gemeinſchaftliche Grundlinie $\overline{BC}$ haben, verhalten ſich wie die Segmente der Diagonale, die die andern Scheitelpunkte dieſer Dreyecke verbindet, d. h.

$$\overline{\overline{ABC}} : \overline{\overline{DBC}} = \overline{AH} : \overline{DH}$$

Eben ſo hat man

$$\overline{AK} : \overline{DK} = \overline{\overline{AFG}} : \overline{\overline{DFG}}$$

oder nach dem vorigen Lehrſatz

$$\overline{\overline{ABC}} : \overline{\overline{DBC}} = \overline{\overline{AFG}} : \overline{\overline{DFG}}$$

d. h.

Neunter Lehrſatz.

In jedem vollſtändigen Viereck ſtehen die Flächen der beyden Dreyecke, deren gemeinſchaftlicher Scheitelpunkt der End-

punkt einer Diagonale ist, und deren Grundlinien die beyden andern Diagonalen sind, in demselben Verhältnisse wie die Flächen der beyden Dreyecke, deren gemeinschaftlicher Scheitelpunkt das andere Ende der ersten Diagonale ist, und die sonst auf den nemlichen Grundlinien stehen.

227. Das vollständige Viereck mit seinen 3 Diagonalen, das wir untersucht haben, giebt uns, wenn wir es zerlegen, 11 vollständige Vierecke ohne Diagonalen d. h. 11 verschiedene Figuren, von denen jede aus 4 Linien besteht, die bis zu ihrem Zusammentreffen verlängert sind. Es sind nemlich im Ganzen 7 grade Linien gezogen, nemlich die 4 Seiten des Vierecks *ABDC* und seine 3 Diagonalen. Diese 7 Linien zu 4en verbunden geben

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35 \text{ Verbindungen}$$

Wir würden also 35 Vierecke haben, wenn mehrere sich nicht zu dreyen unter denselben Winkeln durchschnitten. Da nun ein solcher Durchschnitt die Zahl der Figuren um 4 vermindert und es 6 solche Durchschnitte giebt, so kommen $35 - 24 = 11$ Figuren. Da nun aber jede dieser Figuren (vollständige Vierecke ohne Diagonalen) 3 einfache Vierecke einschliefst, (103.) so schliefst das vollständige Viereck mit seinen Diagonalen 33 einfache Vierecke ein. Noch mehr: jedes der 11 vollständigen Vierecke ohne Diagonalen giebt nach dem fünften Lehrsatze, aus dem alle andern (222, 223, 224, 225) abge-

leitet ſind, 4 Formeln; wir werden alſo 44 ganz verſchiedene Formeln haben, die alle auf das vollſtändige Viereck mit ſeinen 3 Diagonalen anwendbar ſind.

Die folgende Tafel enthält die allgemeine Tafel der Correlation dieſer 33 Vierecke, und die 44 Formeln (Fig. 83. 84. 85.).

Allgemeine Tafel der Correlation der Conſtruktion unter 33 einfachen Vierecken, die das vollſtändige Viereck mit ſeinen 3 Diagonalen begreift, nebſt den 44 Formeln des fünften Lehrſatzes.

Die Winkel des Urvierecks ſind durch A, B, D, C bezeichnet, und man nimmt an

$$\begin{aligned}
\overline{AB} \cdot \overline{DC} &\doteqdot F \\
\overline{AC} \cdot \overline{DB} &\doteqdot G \\
\overline{AD} : \overline{BC} &\doteqdot H \\
\overline{AD} : \overline{FG} &\doteqdot K \\
\overline{BC} \cdot \overline{FG} &\doteqdot L
\end{aligned}$$

Jedes Viereck iſt erſt durch ſeine 4 Winkel, und dann durch die Punkte bezeichnet, wo die gegenüberſtehenden Seiten ſich ſchneiden.

	Vierecke	Formeln
ites Syſtem	$ABDCFG$	$\overline{AF}.\overline{BD}.\overline{GC} = \overline{AC}.\overline{BF}.\overline{GD}$
	$AFDGBC$	$\overline{AG}.\overline{CD}.\overline{FB} = \overline{AB}.\overline{CG}.\overline{FD}$
	$BFCGAD$	$\overline{BG}.\overline{DC}.\overline{FA} = \overline{BA}.\overline{DG}.\overline{FC}$
		$\overline{CF}.\overline{DB}.\overline{GA} = \overline{CA}.\overline{DF}.\overline{GB}$

	Vierecke	Formeln
2tes Syſtem	FGCBLA FLCAGB GLBAFC	$\overline{FL}.\overline{GC}.\overline{AB} = \overline{FB}.\overline{GL}.\overline{AC}$ $\overline{FA}.\overline{BC}.\overline{LG} = \overline{FG}.\overline{BA}.\overline{LC}$ $\overline{GA}.\overline{CB}.\overline{LF} = \overline{GF}.\overline{CA}.\overline{LB}$ $\overline{BL}.\overline{CG}.\overline{AF} = \overline{BF}.\overline{CL}.\overline{AG}$
3tes Syſtem	FDHBCA FCHADB DCBAFH	$\overline{FC}.\overline{DH}.\overline{AB} = \overline{FB}.\overline{DC}.\overline{AH}$ $\overline{FA}.\overline{BH}.\overline{CD} = \overline{FD}.\overline{BA}.\overline{CH}$ $\overline{DA}.\overline{HB}.\overline{CF} = \overline{DF}.\overline{HA}.\overline{CB}$ $\overline{BC}.\overline{HD}.\overline{AF} = \overline{BF}.\overline{HC}.\overline{AD}$
4tes Syſtem	FKDBGA FGDAKB KGBAFD	$\overline{FG}.\overline{KD}.\overline{AB} = \overline{FB}.\overline{KG}.\overline{AD}$ $\overline{FA}.\overline{BD}.\overline{GK} = \overline{FK}.\overline{BA}.\overline{GD}$ $\overline{KA}.\overline{DB}.\overline{GF} = \overline{KF}.\overline{DA}.\overline{GB}$ $\overline{BG}.\overline{DK}.\overline{AF} = \overline{BF}.\overline{DG}.\overline{AK}$
5tes Syſtem	LGDCFB LFDBGC GFCBLD	$\overline{LF}.\overline{GD}.\overline{BC} = \overline{LC}.\overline{GF}.\overline{BD}$ $\overline{LB}.\overline{CD}.\overline{FG} = \overline{LG}.\overline{CB}.\overline{FD}$ $\overline{GB}.\overline{DC}.\overline{FL} = \overline{GL}.\overline{DB}.\overline{FC}$ $\overline{CF}.\overline{DG}.\overline{BL} = \overline{CL}.\overline{DF}.\overline{BG}$
6tes Syſtem	GCHDAB GAHBCD CADBGH	$\overline{GA}.\overline{CH}.\overline{BD} = \overline{GD}.\overline{CA}.\overline{BH}$ $\overline{GB}.\overline{DH}.\overline{AC} = \overline{GC}.\overline{DB}.\overline{AH}$ $\overline{CB}.\overline{HD}.\overline{AG} = \overline{CG}.\overline{HB}.\overline{AD}$ $\overline{DA}.\overline{HC}.\overline{BG} = \overline{DG}.\overline{HA}.\overline{BC}$
7tes Syſtem	GCDKAF GADFCK CAKFGD	$\overline{GA}.\overline{CD}.\overline{FK} = \overline{GK}.\overline{CA}.\overline{FD}$ $\overline{GF}.\overline{KD}.\overline{AC} = \overline{GC}.\overline{KF}.\overline{AD}$ $\overline{CF}.\overline{DK}.\overline{AG} = \overline{CG}.\overline{DF}.\overline{AK}$ $\overline{KA}.\overline{DC}.\overline{FG} = \overline{KG}.\overline{DA}.\overline{FC}$

Vier-

	Vierecke	Formeln
8tes Syſtem	$LKDCFH$ $LFDHKC$ $KFCHLD$	$\overline{LF}.\overline{KD}.\overline{HC} = \overline{LC}.\overline{KF}.\overline{HD}$ $\overline{LH}.\overline{CD}.\overline{FK} = \overline{LK}.\overline{CH}.\overline{FD}$ $\overline{KH}.\overline{DC}.\overline{FL} = \overline{KL}.\overline{DH}.\overline{FC}$ $\overline{CF}.\overline{DK}.\overline{HL} = \overline{CL}.\overline{DF}.\overline{HK}$
9tes Syſtem	$FKHBLA$ $FLHAKB$ $KLBAFH$	$\overline{FL}.\overline{KH}.\overline{AB} = \overline{FB}.\overline{KL}.\overline{AH}$ $\overline{FA}.\overline{BH}.\overline{LK} = \overline{FK}.\overline{BA}.\overline{LH}$ $\overline{KA}.\overline{HB}.\overline{LF} = \overline{KF}.\overline{HA}.\overline{LB}$ $\overline{BL}.\overline{HK}.\overline{AF} = \overline{BF}.\overline{HL}.\overline{AK}$
10s Syſtem	$LGDHKB$ $LKDBGH$ $GKHBLD$	$\overline{LK}.\overline{GD}.\overline{BH} = \overline{LH}.\overline{GK}.\overline{BD}$ $\overline{LB}.\overline{HD}.\overline{KG} = \overline{LG}.\overline{HB}.\overline{KD}$ $\overline{GB}.\overline{DH}.\overline{KL} = \overline{GL}.\overline{DB}.\overline{HK}$ $\overline{HK}.\overline{DG}.\overline{BL} = \overline{HL}.\overline{DK}.\overline{BG}$
11s Syſtem	$KGCHLA$ $KLCAGH$ $GLHAKC$	$\overline{KL}.\overline{GC}.\overline{AH} = \overline{KH}.\overline{GL}.\overline{AC}$ $\overline{KA}.\overline{HC}.\overline{LG} = \overline{KG}.\overline{HA}.\overline{LC}$ $\overline{GA}.\overline{CH}.\overline{LK} = \overline{GK}.\overline{CA}.\overline{LH}$ $\overline{HL}.\overline{CG}.\overline{AK} = \overline{HK}.\overline{CL}.\overline{AG}$

Dieſe Formeln ſind ohne irgend eine Zeichenveränderung auf jedes vollſtändige Viereck anwendbar, das ſeine 3 Diagonalen hat. Was auch ſonſt immer ſeine Geſtalt ſeyn mag, weil alle dieſe Formeln nur 2 Glieder haben. (47.)

228. Wir wiederholen die Lehrſätze (V, VI, VII, VIII, IX) in folgendem Satze.

Es ſeyen A, B, C, D (Fig. 83, 84, 85.) 4 willkührlich in derſelben Ebene angenommene Punkte, von denen keine 3 in einer graden Linie ſind. Wir wollen annehmen

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \mp F$$
$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} \mp G$$
$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} \mp H$$
$$\overline{AD} \cdot \overline{FG} \mp K$$
$$\overline{BC} \cdot \overline{FG} \mp L$$

So hat man die 5 folgenden Formeln (218, 219, 220, 221, 222.)

1) . . . $\overline{AF}.\overline{BD}.\overline{GC} = \overline{AC}.\overline{BF}.\overline{GD}$
2) . . . $\overline{BA}.\overline{BD}:\overline{CA}.\overline{CD} = \overline{BF}.\overline{BG}:\overline{CF}.\overline{CG}$
3) . . . $\overline{AB}.\overline{FK}.\overline{GC} = \overline{AC}.\overline{FB}.\overline{GK}$
4) . . . $\overline{AH}:\overline{DH} = \overline{AK}:\overline{DK}$.
5) . . . $\overline{\overline{ABC}}:\overline{\overline{AFG}} = \overline{\overline{DBC}}:\overline{\overline{DFG}}$.

229. Ich komme wieder auf die Theorie der Figuren, die durch Transverſalen in verſchiedener Richtung geſchnitten ſind.

Es ſey (Fig. 87.) *ABC* ein beliebiges Dreyeck. Aus einem in der Ebene des Dreyecks willkührlich angenommenen Punkte *D* (gleich viel ob auſserhalb, oder innerhalb des Dreyecks) wollen wir zu den Winkeln *A*, *B*, *C* die 3 Transverſalen

$$\overline{ADa}$$
$$\overline{BDb}$$
$$\overline{CDc}$$

ziehen; dann durch die Punkte *b*, *c*, die Transverſale $\overline{bcp}$. Dieſe Linie mit den 6 vorhergehenden bildet das vollſtändige Viereck der (Fig. 72.) mit ſeinen 3 Diagonalen. Fügen wir nun noch zu dieſer Figur die beyden neuen Linien $\overline{abn}$, $\overline{acm}$, ſo erhalten wir ein eingeſchriebenes Dreyeck *abc*.

Im Dreyecke ABC haben wir (223.)

$$\overline{Ac}.\overline{Ba}.\overline{Cb} = \overline{Ab}.\overline{Bc}.\overline{Ca}$$

Eben so (224.)

$$\overline{Bc}.\overline{An} = \overline{Ac}.\overline{Bn}$$
$$\overline{Ab}.\overline{Cm} = \overline{Cb}.\overline{Am}$$
$$\overline{Ca}.\overline{Bp} = \overline{Ba}.\overline{Cp}$$

Aus deren Multiplication

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cp} = \overline{An}.\overline{Bp}.\overline{Cm} \ldots \text{(A)}$$

Bezeichnet man mit a', b', c', die Durchschnittspunkte der Seiten $\overline{cb}$, ca, $\overline{ab}$, mit den Transversalen $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, so giebt das Dreyeck abc

$$\overline{ac'}.\overline{ba'}.\overline{cb'} = \overline{ab'}.\overline{bc'}.\overline{ca'}$$

und

$$\overline{bp}.\overline{ca'} = \overline{cp}.\overline{ba'}$$
$$\overline{cm}.\overline{ab'} = \overline{am}.\overline{cb'}$$
$$\overline{an}.\overline{bc'} = \overline{bn}.\overline{ac'}$$

Aus deren Multiplication

$$\overline{an}.\overline{bp}.\overline{cm} = \overline{am}.\overline{bn}.\overline{cp} \ldots \text{(B)}$$

aus (A) und (B) folgt also

Zehnter Lehrsatz.

230. Wenn aus einem Punkte (D) willkührlich in der Ebene eines Dreyecks (ABC) angenommen, man durch jeden Winkel eine Transversale zieht, die bis zur gegenüberstehenden Seite verlängert wird, und wenn man diese Durchschnittspunkte zu zweyen verbindet, um ein Dreyeck (abc) dem ersten eingeschrieben, zu bilden, dann jede Seite dieses eingeschriebenen Dreyecks verlängert, bis sie die ge-

genüberſtehende Seite des umſchriebenen Dreyecks trifft (*in m, n, p*),

1) So bilden dieſe 3 Durchſchnittspunkte, auf den Seiten des umſchriebenen Dreyecks, 6 Segmente, wovon das Produkt von 3, dem Produkt der andern 3 gleich iſt, wenn man dieſe Produkte nur ſo beſtimmt, daſs in jedes nie 2 kommen, die einen gemeinſchaftlichen Endpunkt haben.

2) Eben ſo bilden dieſe 3 Durchſchnittspunkte auf den Seiten des eingeſchriebenen Dreyecks 6 Segmente, von denen daſſelbe gilt, was bey den Segmenten des umſchriebenen Dreyecks galt.

231. Jetzt nehme ich an, (Fig. 87.) daſs die Punkte *a, b, c,* willkührlich auf den Seiten oder den Verlängerungen der Seiten des Dreyecks *ABC* genommen werden; alſo nicht, wie wir vorher annahmen, in den Durchſchnitten der Seiten des Dreyecks *ABC,* mit den Transverſalen, die von einem Punkte *D* ausgehen.

Dies angenommen giebt das Dreyeck *ABC,* durch die 3 Seiten des eingeſchriebenen Dreyecks $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ geſchnitten

$$\overline{An}.\overline{Ba}.\overline{Cb} = \overline{Ab}.\overline{Bn}.\overline{Ca}$$
$$\overline{Ab}.\overline{Bc}.\overline{Cp} = \overline{Ac}.\overline{Bp}.\overline{Cb}$$
$$\overline{Ac}.\overline{Ba}.\overline{Cm} = \overline{Am}.\overline{Bc}.\overline{Ca}$$

Aus der Multiplication dieſer Formeln kommt

$$\overline{Ba^2}.\overline{An}.\overline{Cm}.\overline{Cp} = \overline{Ca^2}.\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Bp}$$
$$\overline{Ab^2}.\overline{Bn}.\overline{Cp}.\overline{Cm} = \overline{Cb^2}.\overline{Bp}.\overline{An}.\overline{Am}$$
$$\overline{Ac^2}.\overline{Cm}.\overline{Bn}.\overline{Bp} = \overline{Bc^2}.\overline{Cp}.\overline{Am}.\overline{An}$$

Man kann viele ſolche Combinationen aus den gegebenen Formeln (228.) ziehn.

232. Dieſe Theorie wird noch allgemeiner, wenn man die Punkte a, b, c, nicht mehr auf den Seiten des Dreyecks ABC nimmt.

ABC, abc (Fig. 88.) ſeyen zwey beliebige Dreyecke in derſelben Ebene beſchrieben. Wir wollen ihre Seiten verlängern, bis ſie ſich ſämmtlich in den Punkten m, n, p auf $\overline{BC}$, m', n', p' auf $\overline{AC}$, m'', n'', p'' auf $\overline{AB}$ treffen, dann giebt uns das Dreyeck abc (219.)

$$\overline{am}.\overline{bp}.\overline{cn} = \overline{an}.\overline{bm}.\overline{cp}$$
$$\overline{am'}.\overline{bp'}.\overline{cn'} = \overline{an'}.\overline{bm'}.\overline{cp'}$$
$$\overline{am''}.\overline{bp''}.\overline{cn''} = \overline{an''}.\overline{bm''}.\overline{cp''}$$

Alſo

$$\overline{am}.\overline{am'}.\overline{am''}.\overline{bp}.\overline{bp'}.\overline{bp''}.\overline{cn}.\overline{cn'}.\overline{cn''} =$$
$$\overline{an}.\overline{an'}.\overline{an''}.\overline{bm}.\overline{bm'}.\overline{bm''}.\overline{cp}.\overline{cp'}.\overline{cp''}$$

Eine Formel, die man ſo überſetzen kann:

Eilfter Lehrſatz.

233. Wenn zwey Dreyecke abc, ABC (Fig. 88.) in derſelben Ebene beſchrieben ſind, und man ihre Seiten bis zu den Durchſchnittspunkten verlängert, dann

1) das Produkt aus den 3 Segmenten bildet, die auf $\overline{ab}$ zwiſchen a und den 3 Seiten des Dreyecks ABC liegen;

2) Eben so das Produkt aus den 3 Segmenten, die auf $\overline{bc}$ zwischen b und den 3 Seiten des Dreyecks ABC liegen;

3) Eben so das Produkt aus den 3 Segmenten, die auf $\overline{ca}$, zwischen c und den 3 Seiten des Dreyecks ABC liegen,

So wird das Produkt aus diesen 9 Faktoren gleich seyn dem Produkte aus folgenden 9 Faktoren:

1) den 3 Segmenten auf $\overline{ac}$, zwischen dem Punkte a und den 3 Seiten des Dreyecks ABC;

2) den 3 Segmenten auf $\overline{cb}$ zwischen c und den 3 Seiten des Dreyecks ABC,

3) den 3 Segmenten auf $\overline{ba}$ zwischen b und den 3 Seiten des Dreyecks ABC.

Da dieſs statt finden muſs bey jeder Lage der Punkte a, b, c, so haben wir auch

$$\overline{Am'}.\overline{An'}.\overline{Ap'} \times \overline{Cm}.\overline{Cn}.\overline{Cp} \times \overline{Bm''}.\overline{Bn''}.\overline{Bp''}$$
$$= \overline{Am''}.\overline{An''}.\overline{Ap''} \times \overline{Bm}.\overline{Bn}.\overline{Bp} \times \overline{Cm'}.\overline{Cn'}.\overline{Cp'}$$

234. Wenn man statt des Dreyecks ABC ein Vieleck von einer gröſseren Anzahl Seiten annimmt, die alle durch die 3 verlängerten Seiten des Dreyecks abc geschnitten werden, so ist der Lehrsatz noch anwendbar. Denn vergleicht man nach und nach das Dreyeck abc mit jeder Seite des neuen Vielecks als Transversale, so haben wir so viele den 3 ersten (232.) analoge Gleichungen als Seiten zu dem neuen Vieleck. Multipliciren wir alle diese Gleichungen mit einander, so kommt eine der 4ten ähnliche Formel, wo aber jedes

Glied 3 mal ſo viel Factoren hat, als in dem neuen Vieleck Seiten ſind.

Man kann dieſs ſo ausdrücken:

Zwölfter Lehrſatz.

Wenn man in einer Ebene ein Dreyeck abc, und ein Vieleck beſchreibt, beyder Seiten, bis ſie ſich ſchneiden, verlängert, und ein Produkt bildet aus

1) allen Segmenten auf $\overline{ab}$ zwiſchen a und den Seiten des Vielecks,
2) allen Segmenten auf $\overline{bc}$ zwiſchen b und den Seiten des Vielecks,
3) allen Segmenten auf $\overline{ca}$ zwiſchen c und den Seiten des Vielecks,

ſo iſt dieſs Produkt gleich dem Produkt aus

1) allen Segmenten auf $\overline{ac}$ zwiſchen a und den Seiten des Vielecks,
2) allen Segmenten auf $\overline{cb}$ zwiſchen c und den Seiten des Vielecks,
3) allen Segmenten auf $\overline{ba}$ zwiſchen b und den Seiten des Vielecks.

Iſt die Seitenzahl unendlich, d. h. iſt das Vieleck eine Curve, ſo haben wir

Dreyzehnter Lehrſatz.

235. Wenn man ein Dreyeck in der Ebene einer geometriſchen Curve beſchreibt,

seine Seiten unbestimmt verlängert, und das Produkt bildet aus

1) allen Segmenten auf $\overline{ab}$ zwischen a und den verschiedenen Zweigen der Curve,
2) allen Segmenten auf $\overline{bc}$ zwischen b und den verschiedenen Zweigen der Curve,
3) allen Segmenten auf $\overline{ca}$ zwischen c und den verschiedenen Zweigen der Curve,

so ist dieses Produkt gleich dem Produkt aus

1) allen Segmenten auf $\overline{ac}$ zwischen a und den verschiedenen Zweigen der Curve,
2) allen Segmenten auf $\overline{cb}$ zwischen c und den verschiedenen Zweigen der Curve,
3) allen Segmenten auf $\overline{ca}$ zwischen b und den verschiedenen Zweigen der Curve.

Es sey (Fig. 89.) $m\ m'\ m''$ eine solche Curve, und abc das in ihrer Ebene beschriebene Dreyeck, dessen verlängerte Seiten von der Curve geschnitten werden. Durch jeden solchen Durchschnittspunkt wollen wir eine unbestimmte Tangente legen. np sey die Tangente durch m, und n, p die Durchschnittspunkte dieser Tangente mit den Seiten $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$. Betrachtet man das Dreyeck abc als durch die Transversale $\overline{np}$ geschnitten, so haben wir

$$\overline{am} \cdot \overline{cn} \cdot \overline{bp} = \overline{bm} \cdot \overline{an} \cdot \overline{cp}$$

oder

$$\frac{\overline{am}}{\overline{bm}} = \frac{\overline{an}}{\overline{cn}} \cdot \frac{\overline{cp}}{\overline{bp}}$$

Behandeln wir die übrigen Tangenten eben so, so haben wir so viele Gleichungen wie die vorige, als es Berührungspunkte giebt. Multiplicirt man nun alle diese Gleichungen zusammen, so hat die daraus entstehende Formel zum ersten Gliede einen Bruch, dessen Zähler das erste Produkt des Lehrsatzes und dessen Nenner das zweyte ist. Man muss also beweisen, dass dieser Bruch $= 1$ ist, oder dass Zähler und Nenner des Bruchs, der das zweyte Glied der Formel bildet, gleich sind. Dazu dient nun unmittelbar der dreyzehnte Lehrsatz (235).

236. Die Curve soll z. B. ein Kegelschnitt seyn (Fig. 89 bis). Jede Seite des Dreyecks schneidet sie in 2 Punkten, so haben wir in allem 12 Segmente zwischen den Punkten a, b, c, und den Armen der Curve. Sind nun die 6 Durchschnittspunkte

m, m',
n, n',
p, p',

so haben wir

$$\overline{am} \cdot \overline{am'} \cdot \overline{bp} \cdot \overline{bp'} \cdot \overline{cn} \cdot \overline{cn'} = \overline{an} \cdot \overline{an'} \cdot \overline{cp} \cdot \overline{cp'} \cdot \overline{bm} \cdot \overline{bm'}.$$

Die Punkte a, b, c, sind willkührlich innerhalb oder aufserhalb der Curve genommen, folglich können die Transversalen $\overline{mm'}$, $\overline{nn'}$, $\overline{pp'}$, jede beliebige Rich-

tung haben, wenn sie nur immer alle 3 die Curve treffen.

237. Wir wollen annehmen, dafs sie Tangenten werden (Fig. 90.), *abc* sey das Dreyeck, *A*, *B*, *C* seyen die Berührungspunkte. Die beyden Punkte *m*, *m'* der vorigen Figur fallen in *C* u. s. w. wir haben also

$$\overline{aC}^2 . \overline{bA}^2 . \overline{cB}^2 = \overline{aB}^2 . \overline{cA}^2 . \overline{bC}^2 \text{ oder}$$

$$\overline{aC} . \overline{bA} . \overline{cB} = \overline{aB} . \overline{cA} . \overline{bC}$$

Eine merkwürdige Eigenschaft der Kegelschnitte.

238. Wir wollen die 3 Transversalen $\overline{aA}$, $\overline{bB}$, $\overline{cC}$, von den Punkten, wo sich 2 Tangenten schneiden, zu den Berührungspunkten des 3ten ziehen. Es folgt (223.) aus der vorigen Gleichung, dafs diese 3 Transversalen sich in einem Punkte D schneiden.

239. Erhält man durch Verbindung der Berührungspunkte das eingeschriebene Dreyeck *ABC*, und verlängert man die Seiten dieses neuen Dreyecks, bis sie die des ersten treffen, so entsteht daraus eine ähnliche Figur mit der (216.) und so kann man auf alle Curven des zweyten Grades, die zahlreichen Eigenschaften anwenden, die, wie wir gesehen haben, einem solchen Systeme von Transversalen zukommen.

240. Entfernt sich der Punkt *a* ins Unendliche (Fig. 91.), so werden die Seiten $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ parallel, und die Segmente $\overline{am}$, $\overline{am'}$, $\overline{an}$, $\overline{an'}$, unendlich, und ihr letztes Verhältnifs im Verhältnifs der Gleichheit also wird die Formel (236.)

$$\overline{bp} . \overline{bp'} . \overline{cn} . \overline{cn'} = \overline{cp} . \overline{cp'} . \overline{bm} . \overline{bm'}$$

aus der man diese Proportion zieht

$$\overline{bm} . \overline{bm'} : \overline{cn} . \overline{cn'} = \overline{bp} . \overline{bp'} : \overline{cp} . \overline{cp'}$$

Eine bekannte Eigenschaft der Kegelschnitte.

Da eben dieſer Beweis, durch den dreyzehnten Lehrſatz, auf alle Curven angewandt werden kann, ſo darf man ſchlieſsen, daſs, wenn man in einer geometriſchen Curve eine Axe gezogen hat, die ſie an mehrern Stellen ſchneidet, und mehrere parallele Ordinaten, unter beliebigen Winkeln mit der Abſciſſenlinie zieht, ſich die Produkte der Segmente, welche die Curve auf der Abſciſſenlinie in verſchiedenen Punkten der Axe abſchneidet, wie die Produkte der correſpondirenden Ordinaten verhalten; eine Eigenſchaft, die Newton ſchon in der Enumeratio linear. tert. ord. angiebt, und die eine der fruchtbarſten in der Theorie der Curven iſt.

Da ich aber nicht in dieſem Abſchnitte die Eigenſchaften der Curven unterſuchen will, ſo verweiſe ich deswegen auf den 6ten. Hier wollte ich bloſs zeigen, wie weit man die Theorie der Transverſalen treiben kann.

Die Eigenſchaft (129.) eines Dreyecks, das durch eine Transverſale geſchnitten wird, kommt auch andern Vielecken zu, wie groſs auch die Zahl ihrer Seiten ſey, und wir werden bald finden, daſs ſie auch bey ſolchen, die nicht in einer Ebene liegen, ſtatt findet, wenn man ſie auf eine Transverſalebene bezieht, ſtatt ſie auf eine grade Linie zu beziehen. Wir können alſo folgenden Satz aufſtellen:

Vierzehnter Lehrſatz.

241. Wenn ein beliebiges Vieleck in einer Ebene beſchrieben iſt, und man eine Transverſale zieht, die alle Seiten (oder

deren Verlängerung) ſchneidet, ſo iſt das Produkt aus der Hälfte der Segmente, die zwey, und zwey auf den Seiten des Vielecks, zwiſchen der Transverſale und den Winkeln, die die Seiten begränzen, gebildet werden, gleich dem Produkte aller andern Segmente, wenn man die Segmente ſo nimmt, daſs nie 2 in daſſelbe Produkt kommen, die durch denſelben Winkel des Vielecks oder denſelben Punkt der Transverſale begränzt werden.

Nimmt man z. B. ein Fünfeck und betrachtet 4 von den Seiten bis in ihrem Zuſammentreffen verlängert, beſonders als ein Viereck und die 5te Seite als eine Transverſale, ſo kann man den Satz auf dieſs Viereck anwenden, das dann eine Gleichung von 2 Gliedern giebt, wo jedes Glied blos 4 Faktoren hat.

Es ſey *ABCDE* (Fig. 92.) das gegebene Vieleck, und $\overline{MN}$ die Transverſale in der Ebene des Vielecks. Aus einem Winkel z. B. aus *B* wollen wir Diagonalen nach allen andern *E*, *D*, ziehen, die mit ihm nicht ſchon durch die Seiten des Vielecks verbunden ſind. Wir wollen alle dieſe Seiten und Diagonalen verlängern, bis ſie die Transverſale in *f*, *g*, *p*, *h*, *k*, *r*, *s* treffen. Betrachten wir nun die Dreyecke *BAE*, *BED*, *BDC*, die durch die Transverſale geſchnitten ſind, ſo haben wir nach (219.)

$$\overline{Af} \cdot \overline{Ek} \cdot \overline{Br} = \overline{Bf} \cdot \overline{Ak} \cdot \overline{Er} \cdot$$
$$\overline{Er} \cdot \overline{Bs} \cdot \overline{Dh} = \overline{Br} \cdot \overline{Ds} \cdot \overline{Eh} \cdot$$
$$\overline{Ds} \cdot \overline{Bg} \cdot \overline{Cp} = \overline{Bs} \cdot \overline{Cg} \cdot \overline{Dp} \cdot$$

Multiplicirt und reducirt man, so kommt

$$\overline{Af}.\overline{Bg}.\overline{Cp}.\overline{Dh}.\overline{Ek} = \overline{Ak}.\overline{Bf}.\overline{Cg}.\overline{Dp}.\overline{Eg}.$$

w. z. b. w.

242. Wir können jetzt den Beweis leicht auf den Fall anwenden, wenn das Vieleck nicht in einer Ebene liegt, und von irgend einer Transversalebene geschnitten wird.

Denn wenn wir die eben untersuchte Figur als eine Projektion der neuen auf eine mit der Transversalebene senkrechte Ebene betrachten, so kann diese Transversalebene durch $\overline{MN}$ vorgestellt, und die Linien $\overline{Af}$, $\overline{Df}$, u. s. w. werden die Projektionen der zu betrachtenden Segmente seyn. Nimmt man also A', f', D', u. s. w. die wahren Punkte, die in A, f, D u. s. w. projicirt sind, also die wahren Segmente $\overline{A'f'}$, $\overline{D'f'}$, u. s. w. so müssen wir beweisen, dass

$$\overline{A'f'}.\overline{B'g'}.\overline{C'p'}.\overline{D'h'}.\overline{E'k'} = \overline{A'k'}.\overline{B'f'}.\overline{C'g'}.\overline{D'p'}.\overline{E'h'}$$

Wendet man nun, ganz wie vorhin, den Satz (219.) auf das Dreyeck $B'A'E'$, durch die Transversale $\overline{f'r'}$ geschnitten, $B'E'D'$ durch die Transversale $s'r'$ geschnitten u. s. w. an, so gelangt man, aus 3 ähnlichen Gleichungen, wo die Buchstaben nur Accente haben, eben so dahin.

Da die Zahl der Seiten des Vielecks hier offenbar gleichgültig ist, so können wir folgenden Satz ableiten:

Funfzehnter Lehrſatz.

Wenn irgend ein Vieleck, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, durch eine Transverſalebene geſchnitten wird, ſo iſt das Produkt der Hälfte der Segmente, welche auf den Seiten des Vielecks zwiſchen der Transverſalebene und den Winkeln, die die Seite begränzen, entſtehen, dem Produkte der andern Segmente gleich, wenn man nur dieſe Produkte ſo beſtimmt, daſs nie zwey Segmente, die denſelben Punkt der Transverſalebene, oder denſelben Winkel des Vielecks zu Gränzpunkten haben, in einem Produkt zuſammenkommen.

243. Eben ſo können wir den zwölften Lehrſatz auf alle in einer Ebene beſchriebene Polygone ausdehnen.

Sechszehnter Lehrſatz.

Es ſey (Fig. 93.) irgend ein Syſtem von graden unbeſtimmten Linien, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ u. ſ. w. in derſelben Ebene gezogen, und die ein Vieleck bilden. Wir wollen in derſelben Ebene noch ein anderes Vieleck *abcde* bilden, und die Seiten unbeſtimmt verlängern; dann durch $(a'b')$ das Produkt des Segments auf *ab*, zwiſchen dem Punkte *a* und den verſchiedenen verlängerten Linien des Syſtems $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, u. ſ. w. bezeichnen; eben ſo durch $(b'a')$ das Produkt der Segmente auf derſelben Linie

zwiſchen dem Punkte b, und den Linien $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, u. ſ. w. Daſſelbe ſoll $(b'c')$ und $(c'b')$ auf $\overline{bc}$, zwiſchen den Punkten b, c, und den obigen Linien bedeuten u. ſ. w. Dieſs vorausgeſetzt hat man

$(a'b') \cdot (b'c') \cdot (c'd') \cdot$ u. ſ. w. $= (b'a') \cdot (c'b') \cdot (d'c')$ u. ſ. w.

In der That, wenn man die Diagonale $\overline{ac}$ zieht, und ſo wie vorhin durch $(a'c')$ und $(c'a')$ die Produkte der Segmente auf $\overline{ac}$ bezeichnet, die durch die Linien $\overline{AB}$, BC abgeſchnitten werden u. ſ. w., ſo hat man nach dem zwölften Lehrſatze $(a'b')\,(b'c')\,(c'a') = (a'c')\,(c'b')\,(b'a')$.

Eben ſo wenn man die Diagonale $\overline{ad}$ zieht, hat man

$(a'c')\,(c'd')\,(d'a') = (a'd')\,(d'c')\,(c'a')$

und endlich

$(a'd')\,(d'e')\,(e'a') = (a'e')\,(e'd')\,(d'a')$

Multiplicirt man dieſe 3 Gleichungen und reducirt, ſo kommt

$(a'b')\,(b'c')\,(c'd')\,(d'e')\,(e'a') = (a'e')\,(e'd')\,(d'c')\,(c'b')\,(b'a')$

was zu beweiſen war. Man ſieht, daſs der Beweis nicht durch die Seitenzahl des Vielecks, noch durch die Anzahl der Transverſale eingeſchränkt iſt.

244. Eben ſo klar iſt es, daſs derſelbe Beweis auf den Fall paſst, wo die Punkte a, b, c, d, e nicht in einer Ebene ſind, wenn man dann nemlich $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ nicht wie grade Linien, ſondern wie Ebenen betrachtet. Man kann alſo im Allgemeinen folgenden Lehrſatz aufſtellen:

Siebenzehnter Lehrſatz.

Bildet man im Raume irgend ein Vieleck, mag es in derſelben Ebene liegen oder nicht, verlängert die Seiten dieſes Vielecks, bis ſie die Seitenflächen eines Polyeders treffen, und nennt die Scheitel der Winkel dieſes Vielecks $a, b, c, d \ldots$, und $(a'b')$ das Produkt aller Segmente auf $\overline{ab}$, die, wenn man vom Punkte a ausgeht, von den Seitenflächen des Polyeders gebildet werden u. ſ. w., ſo hat man

$$(a'b')\,(b'c')\,(c'd')\ldots\ldots = (b'a')\,(c'b')\,(d'c')\ldots\ldots$$

245. Aus dieſer ganzen Theorie der Linearquantitäten, allein und ohne goniometriſche Funktionen betrachtet, flieſst, daſs, ſo oft eine Figur nur mit dem Lineal und dem Zirkel conſtruirt werden kann, ohne eines abgetheilten Kreiſes zu bedürfen, man auch analytiſche Ausdrücke aller, ins Syſtem gehörigen, Linien aus den Werthen der gegebenen Quantitäten finden kann, ohne bey der Rechnung goniometriſche Funktionen zu gebrauchen. Man kann nemlich, wenn man die nöthigen Diagonalen zieht, aus der Figur eine Kette von Dreyecken bilden, die in verſchiedenem Sinn von Transverſalen geſchnitten werden.

246. Dieſelbe Theorie der Transverſalen erſtreckt ſich auf ſphäriſche Dreyecke, und andere Vielecke, die auf der Oberfläche der Kugel durch Bogen gröſster Kreiſe gebildet werden, wenn man für die Linien, die wir behandelt haben, die Sinus der correſpondirenden Bogen ſetzt.

Es

Es ſey (Fig. 94.) AFG ein ſphäriſches Dreyeck, durch den Bogen eines gröſsten Kreiſes, nemlich $\overset{\frown}{CBL}$ geſchnitten. Die 3 Dreyecke ABC, FLB, GLC geben

$$\sin\overset{\frown}{AB}:\sin\overset{\frown}{AC}=\sin A\hat{C}B:\sin A\hat{B}C$$
$$\sin\overset{\frown}{FL}:\sin\overset{\frown}{BF}=\sin A\hat{B}C:\sin B\hat{L}G$$
$$\sin\overset{\frown}{CG}:\sin\overset{\frown}{GL}=\sin B\hat{L}G:\sin A\hat{C}B$$

aus der Multiplication dieſer 3 Proportionen entſteht

$$\sin\overset{\frown}{AB}.\sin\overset{\frown}{FL}.\sin\overset{\frown}{GC}=\sin\overset{\frown}{AC}.\sin\overset{\frown}{FB}.\sin\overset{\frown}{GL}$$

eine Formel, die dem fünften Lehrſatz (219.) entſpricht.

247. Eben ſo wenn ABC das Dreyeck, und $\overset{\frown}{LG}$ die Transverſale iſt, haben wir

$$\sin\overset{\frown}{AG}.\sin\overset{\frown}{BF}.\sin\overset{\frown}{CL}=\sin\overset{\frown}{AF}.\sin\overset{\frown}{BL}.\sin\overset{\frown}{CG}$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit der vorigen und reducirt, ſo kommt

$$\sin\overset{\frown}{AB}.\sin\overset{\frown}{AG}.\sin\overset{\frown}{LC}.\sin\overset{\frown}{LF}=\sin\overset{\frown}{AC}.\sin\overset{\frown}{AF}.\sin\overset{\frown}{LB}.\sin\overset{\frown}{LG}$$

eine Formel, die dem ſechſten Lehrſatze (222.) entſpricht.

248. Wir wollen die beyden Bogen gröſsten Kreiſe $\overset{\frown}{BG}$, $\overset{\frown}{CF}$ ziehen; durch ihren Durchſchnittspunkt D, und den Scheitel A, den Bogen $\overset{\frown}{AHDK}$. Jetzt können wir auf die beyden Dreyecke AFK, AGK, die durch dieſe letzte Transverſale gebildet wurden, und welche die beyden andern $\overset{\frown}{GDB}$, $\overset{\frown}{FDC}$ ſchneiden, den eben gefundenen Grundſatz anwenden, um die beyden Gleichungen

$$\sin\overset{\frown}{AB}.\sin\overset{\frown}{DK}.\sin\overset{\frown}{FG}=\sin\overset{\frown}{AD}.\sin\overset{\frown}{BF}.\sin\overset{\frown}{KG}$$
$$\sin\overset{\frown}{AD}.\sin\overset{\frown}{GC}.\sin\overset{\frown}{FK}=\sin\overset{\frown}{DK}.\sin\overset{\frown}{AC}.\sin\overset{\frown}{FG}$$

zu erhalten. Multiplicirt man ſie, und reducirt, ſo kommt

$$\sin \widehat{AB} . \sin \widehat{GC} . \sin \widehat{KF} = \sin \widehat{AC} . \sin \widehat{KG} . \sin \widehat{BF}$$

eine Formel, die dem ſiebenten Lehrſatz (223.) entſpricht.

249. Endlich wenn man den im vorigen Artikel gefundenen Grundſatz auf das Dreyeck ADG anwendet, das zwey Scheitelpunkte mit dem Dreyeck AFG gemeinſchaftlich, und den 3ten in D hat, wo ſich die Transverſalen ſchneiden, ſo hat man

$$\sin \widehat{AC} . \sin \widehat{BG} . \sin \widehat{DK} = \sin \widehat{AK} . \sin \widehat{BD} . \sin \widehat{CG}$$

Vergleicht man nun noch daſſelbe Dreyeck mit der Transverſale $\widehat{LHC}$, ſo hat man

$$\sin \widehat{AL} . \sin \widehat{BD} . \sin \widehat{CG} = \sin \widehat{AC} . \sin \widehat{BG} . \sin \widehat{DH}.$$

Aus der Multiplication beyder Gleichungen wird

$$\sin \widehat{AH} . \sin \widehat{DK} = \sin \widehat{AK} . \sin \widehat{DH}$$

eine Formel, die dem achten Lehrſatz (224.) entſpricht.

Man ſieht, wie man die andern Lehrſätze von gradlinigten Vielecken auf ſphäriſche anwenden kann, deren Seiten Bogen gröſster Kreiſe auf der Kugel ſind.

Wir kommen im folgenden Abſchnitt auf dieſe Unterſuchungen zurück.

Dreyzehnter Lehrſatz.

250. Wenn man aus irgend einem Punkte, grade Linien oder Radien nach allen Winkeln eines gegebenen Vielecks zieht, ſo wird jeder Winkel dieſes Vielecks durch den correſpondirenden Radius in zwey

andere Winkel getheilt seyn, dafs man alſo doppelt ſo viel neue Winkel als alte hat. Dann iſt das Produkt aus dem Sinus der Hälfte dieſer neuen Winkel, dem Produkte der Sinus der andern Hälfte gleich, wenn man dieſe Produkte ſo bildet, dafs nie zwey Winkel in einem zuſammenkommen, die denſelben Scheitel haben.

Es ſey *ABCDF* das gegebne Vieleck, (Fig. 95.) *G* der Fokus, aus dem alle Radien ausgehen, es ſoll alſo bewieſen werden, dafs

$$\sin A\hat{B}G \cdot \sin B\hat{C}G \cdot \sin C\hat{D}G \cdot \sin D\hat{E}G \cdot \sin E\hat{F}G \cdot \sin F\hat{A}G = \sin C\hat{B}G \cdot \sin D\hat{C}G \cdot \sin E\hat{D}G \cdot \sin F\hat{E}G \cdot \sin A\hat{F}G \cdot \sin B\hat{A}G.$$

Die Dreyecke *ABG*, *BCG*, *CDG* geben

$$\overline{AG} : \overline{BG} = \sin A\hat{B}G : \sin B\hat{A}G$$
$$\overline{BG} : \overline{CG} = \sin B\hat{C}G : \sin C\hat{B}G$$
$$\overline{CG} : \overline{DG} = \sin C\hat{D}G : \sin D\hat{C}G \text{ u. ſ. w.}$$

Multiplicirt man dieſe Proportionen, ſo werden die beyden erſten Glieder identiſch, alſo die zweyten gleich.

Eben der Beweis tritt augenſcheinlich ein, wenn der Fokus auſserhalb der Ebene des Vielecks genommen iſt, und wenn dieſs Vieleck ſelbſt nicht in einer Ebene liegt. So iſt z. B. bey einer 3 eckigten Pyramide, unter den 6 Winkeln, die durch die 3 Kanten, die von der Spitze ausgehen, mit den Seiten der Grundlinie gebildet werden, das Produkt der Sinus von 3en, gleich dem Produkt der Sinus der 3 übrigen, wenn man ſie wechſelsweiſe nimmt.

251. Die ganze Trigonometrie kann leicht auf einen Grundſatz zurückgebracht werden, nemlich auf den, daſs in jedem Dreyecke die Seiten der Sinus der gegenüberſtehenden Winkel proportional ſind. Unmittelbar werden dadurch ſchon alle Fälle bis auf zwey aufgelöſt, nemlich die, wo man einen Winkel aus den 3 gegebenen Seiten beſtimmen will, oder aus zwey Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel das übrige ſucht. Dieſe beyden Fälle laſſen ſich leicht auf die übrigen bringen.

Es ſey ABC (Fig. 9.) das aufzulöſende Dreyeck, aus dem Punkte A ſey das Perpendikel $\overline{AD}$ auf die gegenüberſtehende Seite $\overline{BC}$ geſenkt, ſo giebt das rechtwinklichte Dreyeck ABD

$$BD : AB = \mathit{ſin}\ B\hat{A}D : 1$$

oder

$$\overline{BD} = \overline{AB} \,.\, \mathit{ſin}\ B\hat{A}D.$$ Da aber $B\hat{A}D$ das Complement von $A\hat{B}C$ iſt, ſo hat man

$$\overline{BD} = \overline{AB} \,.\, \mathit{coſ}\ A\hat{B}C$$

eben ſo

$$\overline{CD} = \overline{AC} \,.\, \mathit{coſ}\ A\hat{C}D$$

alſo

$$\overline{BC} = \overline{AB} \,.\, \mathit{coſ}\ A\hat{B}C + \overline{AC} \,.\, \mathit{coſ}\ A\hat{C}B$$

Aehnliche Gleichungen müſſen für die beyden andern Seiten des Dreyecks eintreten. Nennt man nun die Winkel A, B, C, die gegenüberſtehenden Seiten a, b, c, ſo hat man folgende 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a &= b \,.\, \mathit{coſ}\ C + c \,.\, \mathit{coſ}\ B \\ b &= a \,.\, \mathit{coſ}\ C + c \,.\, \mathit{coſ}\ A \\ c &= a \,.\, \mathit{coſ}\ B + b \,.\, \mathit{coſ}\ A \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

Multiplicirt man die erſte mit a, die zweyte mit b, die dritte mit c, addirt die beyden letzten, und zieht die erſte ab, ſo kommt

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2b.c.cof A.$$

Eine Gleichung, die die beyden Fälle auflöſt, die ſich der unmittelbaren Anwendung des obigen Grundſatzes entzogen, die aber ſo auch, wie man ſieht, leicht daraus abgeleitet werden.

252. Aus den 3 Gleichungen (A) ſehen wir, daſs in jedem Dreyeck jede Seite gleich der Summe der beyden andern iſt, wenn man jede mit dem Cofinus des Winkels multiplicirt, den ſie mit der erſten bildet.

Aus dieſem Grundſatze allein könnte man wiederum den ziehen, daſs die Seiten dem Sinus der gegenüberſtehenden Winkel proportional ſind, und folglich die ganze Trigonometrie. So eben haben wir die Gleichung

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\cos A$$

daraus gezogen: ſetzt man in dieſe für $\cos A$ ſeinen Werth, nemlich $\sqrt{1 - \sin A^2}$, ſo leitet man daraus ab

$$\sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{\{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)\}}$$

Nennt man die Wurzelgröſse $= K$, ſo haben wir

$$\sin A = \frac{K}{2bc}$$

$$\sin B = \frac{K}{2ac}$$

$$\sin C = \frac{K}{2ab}$$

woraus $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$

$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}$

$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$ folgt.

253. Eben ſo leicht leitet man aus demſelben Grundſatze das Fundamentaltheorem der ganzen Theorie der goniometriſchen Funktionen her, nemlich

$$\sin(B+C) = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$$

da man nun

$$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

hat, ſo ſubſtituire man in dieſer Gleichung für

$$b = a \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$c = a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$$

ſo verwandelt ſich die Gleichung nach der Reduktion in

$$\sin A = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$$

Nun iſt aber hier bekanntlich

$$\sin A = \sin(B+C)$$

Da dieſe Formel für jeden Werth von B und C ſtatt haben muſs, ſo können wir für B z. B. ſein Complement $\pi - B$ ſetzen. Dann wird ſie

$$\cos(B-C) = \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C$$

Setzt man C in dieſen Formeln negativ, ſo fin-

det man den Sinus der Differenz, und den Cosinus der Summe.

Der Grundsatz, dass jede Seite gleich der Summe der beyden andern ist, wenn man jede von diesen mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten bildet, findet nicht allein Anwendung auf das Dreyeck, sondern er ist auch bey Vielecken, mögen sie in einer Ebene oder nicht in einer Ebene liegen, wahr, selbst für alle Polyeder, und man kann ihn als das Fundamentaltheorem ihrer Theorie betrachten.

Neunzehnter Lehrsatz.

254. 1) In jedem Vieleck, mag es in einer Ebene liegen, oder nicht, ist jede Seite gleich der Summe aller andern Seiten, wenn man jede von diesen mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten bildet;

2) In jedem Polyeder ist jede Seitenfläche gleich der Summe aller andern, wenn man jede von diesen mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten bildet.

Wir wollen als Ursystem ein Vieleck *ACDFGB* (Fig. 96) nehmen, so dass die Perpendikel aus den Winkeln *C, D, F, G,* nemlich $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ff}$, $\overline{Gg}$, alle zwischen *A* und *B* fallen. Man ziehe die Parallelen $\overline{D'}$, $\overline{dF'}$, $\overline{fG'}$, $\overline{gB'}$, so ist

$$\overline{Ac} = \overline{Ac} \cdot \cos A$$
$$\overline{cd} = \overline{CD} \cdot \cos C$$
$$\overline{df} = \overline{DF} \cdot \cos D$$
$$\overline{fg} = \overline{FG} \cdot \cos F$$
$$\overline{gB} = \overline{GB} \cdot \cos G$$

wenn A, C, D u. ſ. w. die Winkel bedeuten, die $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ u. ſ. w. mit AB machen. Da nun

$$\overline{AB} = \overline{Ac} + \overline{cd} + \overline{df} + \overline{fg} + \overline{gB}$$

ſo iſt der 1te Theil des Satzes für das Urſyſtem bewieſen.

Dieſs Urſyſtem ſoll ſich nun durch unmerkliche Grade verändern, ſo werden alle neue daraus entſpringende Vielecke, eben ſo viel correlative Syſteme ſeyn, und um den Satz für das Urſyſtem unmittelbar auf ſie anwendbar zu machen, braucht man nur für jeden Winkel jede Seite, den correlativen Werth zu ſetzen.

ACDFGB (Fig. 97.) ſoll das umgeformte Syſtem vorſtellen, wo man gleich ſieht, daſs keine Quantität durch o oder ∞ gegangen iſt. Die Winkel und die Seiten (die einzigen Quantitäten, die hier in Betracht kommen,) konnten bey der Umformung gröſser oder kleiner, aber weder o noch ∞ werden. Der Satz iſt alſo für alle möglichen correlativen Syſteme wahr, mögen die Punkte A, C, D u. ſ. w. in einer Ebene liegen oder nicht. Um den zweyten Theil zu beweiſen, wird man ſich erinnern, daſs die Projektion einer Fläche, dieſer Fläche mit dem Coſinus der Neigung multiplicirt gleich iſt, woraus alſo unmittelbar der Satz folgt, wenn alle Perpendikel aus den Winkeln

auf die Grundfläche, innerhalb des Umfangs dieſer Grundfläche fallen.

Verändert das Urſyſtem ſich nun durch unmerkliche Grade, ſo bleiben alle neue daraus entſtehenden Polyeder correlative Syſteme, mögen die Perpendikel innerhalb des Umfangs der Grundfläche fallen oder nicht. Der Satz iſt alſo auch für Polyeder allgemein. *)

*) So weit war der Druck meines Werkes, als ich erfuhr, daſs es ſeit langer Zeit eine handſchriftliche Abhandlung von Simon L'Huilier aus Genf über denſelben Gegenſtand gäbe. Dieſe Abhandlung im Sekretariat des Nationalinſtituts niedergelegt, enthält wirklich das vorige Grundtheorem, mit verſchiedenen wichtigen Folgen, die der Verfaſſer daraus mit gewohntem Scharfſinn abgeleitet hat. Es liegt in der Natur mathematiſcher Wahrheiten, daſs ſie oft ungefähr zu derſelben Zeit, durch verſchiedene Mittel und von verſchiedenen Perſonen entdeckt werden können. Uebrigens kann das Zuſammentreffen mit dem Bürger L'Huilier, der ſchon durch andere Schriften einen verdienten Namen erhalten hat, für mich nicht anders als ſchmeichelhaft ſeyn.

Die angeführte Abhandlung kann als eine Fortſetzung ſeiner Polygonometrie angeſehen werden.

Mit der gradlinichten Tetragonometrie haben ſich mehrere Gelehrten ſchon beſchäftigt. Lambert lieſs es ſich angelegen ſeyn, ihre Wichtigkeit zu zeigen, und entwarf einen Plan dazu, den Biornſen, ein geſchickter däniſcher Geometer, ausführte, und mit dem ſich auch Meyer in Göttingen mit Erfolg beſchäftigte. Lexell erſchöpfte denſelben Gegenſtand in 2 Abhandlungen im 19. und 20. Bande der Acta Scient. Petropol.

Mein Zweck hier iſt ganz von dem verſchieden, den ſich dieſe berühmten Geometer vorſteckten. Ich will nicht, wie ſie, die Auflöſung der Vielecke für jeden beſondern Fall geben, de ſchon die Aufzählung dieſer Fälle zeigt, daſs ein ſolches Detail beynahe unmöglich wird, ſobald das Vieleck über das Viereck herausgeht, und ſchon für das vollſtändige Viereck mit ſeinen 3 unbeſtimmt verlängerten Diagonalen. Ich wollte nur dieſs Detail für gradlinichte und ſphäriſche Vielecke, und für Polyeder durch eine allgemeine Tafel (wie die Ta-

255. Man kann offenbar den Punkt, der den Scheitel eines jeden Winkels des Vielecks bildet, als eine unendlich kleine Seite betrachten. Man kann auch dieſer unendlich kleinen Seite jede beliebige Richtung beylegen; und da, nach den Begriffen, die (87.) entwickelt wurden, die Winkel, welche dieſe Richtung mit allen andern Seiten des Vielecks bildet, dieſelben ſind, welche jede andere der erſten parallele Linie, mit eben den Seiten bilden würde, ſo kann man folgenden Satz daraus ſchlieſsen.

Zwanzigſter Lehrſatz.

Die Summe der Seiten irgend eines Vielecks, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, von denen jede mit dem Coſinus des Winkels multiplicirt iſt, den ihre Richtung im Sinne des Umfangs genommen, mit einer beliebigen im Raume, in gegebnem Sinne, gezogenen graden Linie macht, iſt $= o$.

256. Da man eben ſo den Scheitel der körperlichen Winkel eines Polyeders als eine unendlich kleine Seitenfläche betrachten kann, ſo kann man auch folgenden Satz aufſtellen:

fel 146 für Dreyecke) erſetzen. Uebrigens habe ich nur gezeigt, wie ſie zu bilden ſey, da meine andern Beſchäftigungen mir jetzt nicht die Ausführung erlauben.

A. d. Verf.

Ein und zwanzigſter Lehrſatz.

Die Summe der Seitenflächen eines Polyeders, von denen jede mit dem Coſinus des Winkels multiplicirt iſt, den ſie mit irgend einer im Raum gegebenen Ebene bildet, iſt = o.

257. Wir wollen die Seiten eines Vielecks a, b, c, d u. ſ. w. nennen, die Winkel durch dieſe Seiten im Sinne des Umfangs gebildet

$$a\hat{}b,$$
$$a\hat{}c,$$
$$b\hat{}c \text{ u. ſ. w.}$$

man hat alſo

$$a = b \,.\, cof\, a\hat{}b + c \,.\, cof\, a\hat{}c + d \,.\, cof\, a\hat{}d \text{ u. ſ. w.}$$
$$b = a \,.\, cof\, a\hat{}b + c \,.\, cof\, b\hat{}c + d \,.\, cof\, b\hat{}d \;\ldots\ldots$$
$$c = a \,.\, cof\, a\hat{}c + b \,.\, cof\, b\hat{}c + d \,.\, cof\, c\hat{}d \;\ldots\ldots$$
$$\text{u. ſ. w.}$$

multiplicirt man die erſte Gleichung mit a, die zweyte mit b, die dritte mit c u. ſ. w., und addirt, ſo kommt

$$aa + bb + cc = 2ab \,.\, cof\, a\hat{}b + 2ac \,.\, cof\, a\hat{}c + \ldots$$

Wir können alſo folgenden Satz aufſtellen:

Zwey und zwanzigſter Lehrſatz.

In jedem Vieleck, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, iſt die Summe der Quadrate der Seiten, gleich der doppelten Summe der Produkte dieſer Seiten, zwey und zwey mit dem Coſinus des eingeſchloſſenen Winkels multiplicirt.

258. Hätte man, ſtatt alle Gleichungen zu addiren, die erſte von der Summe der übrigen abgezogen, ſo hätten wir

$$aa = bb + cc + dd \ldots - 2(bc \cdot cof\, \hat{bc} + bd\, cof\, \hat{bd} \text{ u. ſ. w.})$$

d. h.

In jedem Vielecke iſt das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der übrigen, weniger der doppelten Summe, der Produkte dieſer andern Seiten, zu zweyen mit dem Coſinus des eingeſchloſſenen Winkels multiplicirt.

Die bekannte Formel für Dreyecke

$$aa = bb + cc - 2 \cdot bc \cdot cof\, A$$

iſt ein beſonderer Fall dieſes Satzes.

259. Wenn man, ſtatt alle dieſe Gleichungen zu addiren, willkührlich auf der einen Seite eine gewiſſe Anzahl addirt, und eben ſo alle andern beſonders, dann die letzte Summe von der erſten abzieht, ſo ſchlieſst man daraus, daſs im Allgemeinen

In jedem Vielecke, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, die Summe der Quadrate einer beliebigen Anzahl Seiten, weniger der doppelten Summe des Produkts eben dieſer Seiten, zu zweyen mit dem Coſinus des eingeſchloſſenen Winkels multiplicirt, gleich iſt der Summe der Quadrate aller andern Seiten, weniger der doppelten Summe der Produkte dieſer andern Seiten, zu

zweyen mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt.

260. Verändert das Vieleck seine Gestalt, so dass die Seiten doch dieselben bleiben, und nur die Winkel sich ändern, so bleibt die Summe der Quadrate der Seiten immer dieselbe, also auch der Werth, den wir für dieselbe Summe gefunden haben. (257.) Also überhaupt

Wenn ein Vieleck, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, sich auf irgend eine Art umformt, wobey es aber immer geschlossen bleiben muss, und jede Seite ihre Grösse behält, so ist die Summe der Produkte dieser Seiten, zu zweyen, mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt, eine Constante.

Diese Theorie der Vielecke kann auch auf Polyeder angewandt werden, wie jetzt geschehen soll.

Drey und zwanzigster Lehrsatz.

261. In jedem Polyeder ist die Summe der Quadrate der Seitenflächen, gleich der doppelten Summe der Produkte dieser Seitenflächen zwey und zwey mit dem Cosinus des Winkels, den sie einschliessen, multiplicirt.

Wenn a, b, c die Seitenflächen des Polyeders sind, so hat man nach (254.) die Gleichungen

$$a = b \cdot cos\, \hat{ab} + c \cdot cos\, \hat{ac} + \ldots.$$
$$b = a \cdot cos\, \hat{ab} + c \cdot cos\, \hat{bc} + \ldots.$$

u. s. w.

multiplicirt man die erſte mit a, die zweyte mit b u. ſ. w. ſo kommt

$$aa + bb + cc = 2ab\ cof\ \hat{ab} + 2ac\ .\ cof\ \hat{ac} + \ldots$$

Zieht man die erſte von der Summe aller übrigen ab, ſo iſt

262. Das Quadrat irgend einer Seitenfläche des Polyeders gleich der Summe der Quadrate aller übrigen, weniger der doppelten Summe der Produkte aller dieſer andern Flächen zwey und zwey mit dem Coſinus des eingeſchloſſenen Winkels multiplicirt.

263. In jeder dreyeckigten Pyramide, die 3 auf einander ſenkrechte Seitenflächen hat, iſt das Quadrat der vierten Seitenfläche gleich der Summe der Quadrate der 3 erſten.

Stellt man ſich im Raume 3 andere Ebenen, die den 3 Seitenflächen, die vom Scheitel der Pyramide ausgehn, parallel ſind, vor, ſo werden dieſe neuen Ebenen auch auf einander ſenkrecht ſeyn, und die 3 Projektionen der Grundfläche auf dieſen 3 neuen Ebenen werden reſpektive den 3 parallelen Seitenflächen der Pyramide gleich ſeyn. Alſo wird das Quadrat dieſer Grundfläche auch der Summe der Quadrate der Projektionen gleich ſeyn.

Gleiche Flächen in derſelben Ebene beſchrieben müſſen auch auf jede andere gegebene Ebene gleiche Projektionen haben; ſubſtituirt man alſo für die Grundfläche der beſagten Pyramide, ein beliebiges Vieleck von gleichem Flächeninhalt, ſo werden die Projektio-

nen dieſes Vielecks, reſpektive den entſprechenden Projektionen des Dreyecks gleich ſeyn, das die Grundfläche der Pyramide bildet, man kann alſo daraus den bekannten Grundſatz ableiten:

264. Das Quadrat der Fläche eines Vielecks, das in einer Ebene beſchrieben iſt, iſt gleich der Summe der Quadrate ſeiner Projektionen auf 3 unter einander ſenkrechten Ebenen.

In der dreyeckigten vorher betrachteten Pyramide iſt jede der 3 Seitenflächen, die man unter einander ſenkrecht annahm, die Projektion der Grundfläche auf die Ebene, in der die Seitenfläche liegt, und umgekehrt iſt die Grundfläche die Summe der 3 Dreyecke, die die Projektion der Seitenfläche auf ihr bilden. Man kann alſo im Allgemeinen ſchlieſsen, da dieſelben Schlüſſe auf jedes beliebige Vieleck paſſen:

265. Die Fläche eines Vielecks iſt gleich der Summe der 3 Projektionen der Projektionen, die entſtehen, wenn man zuerſt das Vieleck auf 3 unter einander ſenkrechte Ebenen projicirt, und dann von neuem jede dieſer Projektionen, auf die Ebene des gegebnen Vielecks.

266. Es ſey alſo S die Fläche eines Vielecks, p, q, r die 3 Winkel, die das Vieleck mit 3 auf einander ſenkrechten Ebenen macht, alſo die Projektionen

$$S \cdot \cos p \,.$$
$$S \cdot \cos q$$
$$S \cdot \cos r$$

Und die 3 Projektionen der Projektionen

$$S \cdot cof\, p^2$$
$$S \cdot cof\, q^2$$
$$S \cdot cof\, r^2$$

alſo nach dem vorigen Lehrſatz

$$S = S \cdot cof\, p^2 + S \cdot cof\, q^2 + S \cdot cof\, r^2$$

oder

$$cof\, p^2 + cof\, q^2 + cof\, r^2 = 1 \ldots (A)$$

eine bekannte Sache. Addirt man die 3 Gleichungen

$$fin\, p^2 + cof\, p^2 = 1$$
$$fin\, q^2 + cof\, p^2 = 1$$
$$fin\, r^2 + cof\, r^2 = 1$$

und zieht von ihrer Summe die Gleichung (A) ab, ſo kommt

$$fin\, p^2 + fin\, q^2 - fin\, r^2 = 2$$

267. Dieſe Gleichungen können augenſcheinlich auf die 3 Winkel angewandt werden, die auf der Grundfläche einer 3eckigten Pyramide, von ihren 3 Seitenflächen gebildet werden, wenn dieſe unter einander ſenkrecht ſind. Statt des Quadrats der Fläche eines Vielecks kann man das Produkt der Flächen zweyer anderer Vielecke nehmen, wovon jedes dem vorigen gleich iſt. Stellt man ſich nun vor, daſs eines von dieſen neuen Vielecken doppelt, dreyfach u. ſ. w. ſo groſs wird, während das andere daſſelbe bleibt, ſo wird das Produkt dieſer beyden Vielecke auch doppelt, dreyfach u. ſ. w. In eben dem Verhältniſſe wächſt jede Projektion des veränderlichen Vielecks. Es iſt alſo im Allgemeinen

Das

Das Produkt der Flächen zweyer Vielecke, die in derſelben Ebene beſchrieben ſind, der Summe der 3 Produkte gleich, die ſo entſtehen, indem man die Projektionen der beyden Polygone auf jeder der ſenkrechten Ebenen multiplicirt.

268. Wenn man, ſtatt alle Gleichungen (261) zu addiren, nur eine gewiſſe Anzahl einerſeits, und die andern beſonders addirt, dann die letzte Summe von der erſten abzieht, ſo findet man im Allgemeinen, daſs

In jedem Polyeder die Summe der Quadrate einer beliebigen Anzahl von Seitenflächen, weniger der doppelten Summe eben dieſer Seitenflächen, zwey und zwey mit dem Coſinus des eingeſchloſſenen Winkels multiplicirt, gleich iſt der Summe der Quadrate aller andern Seitenflächen, weniger der doppelten Summe, der Produkte eben dieſer Seitenflächen, zwey und zwey mit dem Coſinus des eingeſchloſſenen Winkels multiplicirt.

269. Zieht man aus einem Punkte im Raum ſoviel gerade Linien, als ein Vieleck Seiten hat, ſo daſs jede dieſer Linien einer entſprechenden Seite des Vielecks gleich und parallel, auch zu demſelben Sinus gezogen iſt, und zu dieſen Linien, noch durch denſelben Punkt eine andere unbeſtimmte Linie oder Transverſale, nach beliebiger Richtung, ſo folgt aus dem, was

(255) gesagt ist, dass in diesem System von Linien, die Summe aller darin vorkommenden, die Transversale ausgenommen, mit dem Cosinus des Winkels, den sie mit der Transversale bilden, = o ist. *F* (Fig. 98.) sey der Punkt, $\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, die Linien, die den Seiten des Vielecks gleich und parallel sind, auch zu derselben Richtung gezogen. Wir wollen ein neues Vieleck *ABCDGH* bilden, indem wir die Endpunkte dieser Radien verbinden, endlich durch *F* eine beliebige grade Linie $\overline{LFK}$ ziehen, und uns eine Ebene *MFN*, die darauf senkrecht sey, vorstellen.

Nach dem, was gesagt ist, ist also die Summe der Radien des Vielecks *ABCDGH*, wenn jeder mit dem Cosinus des Winkels, den er mit *LK* bildet, multiplicirt wird, = o.

Nun ist jeder von diesen Radien, mit dem absoluten Werth des Cosinus, des Winkels, den er mit *LK* bildet, multiplicirt, offenbar gleich dem Perpendikel, das von seinem andern Endpunkte auf die Ebene *MN* fällt. Aber man sieht leicht, dass, wenn der correlative Werth dieses Cosinus für die Punkte *A*, *B*, *C* positiv ist, er für die Punkte *H*, *C*, *D*, die an der andern Seite der Ebene *MN* liegen, negativ seyn muss. Also sind die Perpendikel, die dieser andern Seite entsprechen, invers, also ist die Totalsumme der Perpendikel, die von den Winkelpunkten des Vielecks auf die Ebene *MN* gesenkt sind, = o, wenn man die, die an der einen Seite der Ebene fallen, positiv, und diejenigen, die an die andere Seite fallen, negativ nimmt.

Wir wollen uns jetzt irgend eine andere Ebene *hKc* vorſtellen, parallel mit *MN* und auſserhalb des Vielecks gezogen, dann wird die gerade Linie $\overline{FK}$ der Summe der Perpendikel gleich ſeyn, die aus allen Winkeln des Vielecks *ABCDGH* auf dieſe neue Ebene gezogen werden, wenn man ſie durch ihre Anzahl, oder durch die Zahl der Winkel dividirt. Offenbar iſt jede von ihnen gleich $\overline{FK}$ mehr oder weniger dem Perpendikel, das aus demſelben Winkel auf die Ebene *MN* gezogen wird, nachdem dieſer Punkt unterhalb oder oberhalb der letzten Ebene, in Bezug auf *hKc* iſt: alſo iſt die Summe aller Perpendikel auf *hKc* gleich ſoviel mal $\overline{FK}$ als es Winkel giebt, wenn man dazu eine Summe addirt, die, wie wir bewieſen haben, gleich o iſt. Alſo iſt $\overline{FK}$ wirklich gleich der Summe der Perpendikel auf *hKc*, durch ihre Zahl dividirt, $\overline{FK}$ iſt alſo die mittlere Entfernung aller dieſer Winkel von der Ebene *hKc*: und da wir *LK* willkührlich angenommen haben, ſo folgt, daſs die Entfernung des Punktes *K* von irgend einer Ebene, gleich der mittlern Entfernung aller Punkte des Vielecks von derſelben Ebene iſt. Wir wollen alſo dieſen Punkt Punkt der mittleren Entfernungen nennen, jede grade Linie, die durch ihn geht z. B. $\overline{LFK}$ Axe oder Linie der mittlern Entfernungen, jede Ebene, wie *MN*, die durch eben den Punkt geht, Ebene der mittleren Entfernungen. Wir können alſo folgenden Satz aufſtellen.

Vier und zwanzigſter Lehrſatz.

270. In jedem Vielecke, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, giebt es einen Punkt der mittlern Entfernungen, welcher die Eigenſchaft hat, daſs ſeine Entfernung von einer beliebigen Ebene wirklich das Mittel aller Entfernungen der Winkel dieſes Vielecks von derſelben Ebene iſt, d. h. = der Summe dieſer letzten, dividirt durch ihre Anzahl, wenn man die negativ nimmt, die ſich an der Seite dieſer Ebene befinden, wo ihre Summe am kleinſten iſt.

Geht alſo dieſe Ebene ſelbſt durch den Punkt der mittleren Entfernungen, ſo iſt die Summe der Entfernungen dieſer Ebene von den Winkeln, die ſich an derſelben Seite befinden, gleich der Summe der Entfernungen dieſer Ebene, von den Winkeln an der andern Seite.

271. Da die Lage eines Punktes im Raume durch ſeine Entfernungen von 3 Ebenen ſchon beſtimmt wird, ſo ſieht man leicht, daſs in jedem Vieleck nur ein Punkt der mittleren Entfernungen ſeyn kann.

272. Wir wollen im Raum irgend ein Syſtem von Punkten annehmen. Man kann ſich immer vorſtellen, daſs ſie durch eine Folge von graden Linien vereinigt ſind, die den Umfang eines Vielecks bilden, alſo kann man den vorigen Satz auf jedes beliebige Syſtem von Punkten im Raume anwenden.

Fünf und zwanzigſter Lehrſatz.

273. Wenn man ſich vorſtellt, es ſey durch den Punkt der mittleren Entfernungen der Winkel eines Vielecks, mag dieſs Vieleck in einer Ebene liegen oder nicht, eine beliebige grade Transverſale gezogen, eben ſo vom Mittelpunkt, nach jedem Winkel des Vielecks ein Radius, ſo iſt die Summe der Produkte eines jeden dieſer Radien, mit dem Coſinus des Winkels, den er mit der Richtung der Transverſale bildet, $= 0$.

Der Satz folgt unmittelbar aus 254 und 269.

Sechs und zwanzigſter Lehrſatz.

274. In jedem Vielecke, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, iſt die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Winkel von einem beliebig im Raum angenommenen Punkte, gleich der Summe der Quadrate der Entfernungen eben dieſer Winkel vom Punkte der mittleren Entfernungen, wenn man das Quadrat der Entfernung des erſten im Raum beliebig angenommenen Punkts vom Punkte der mittleren Entfernungen dazu addirt, multiplicirt mit der Zahl der Winkel des Vielecks.

Es ſey *ABCD* (Fig. 99.) irgend ein Vieleck, *F* der Punkt der mittleren Entfernungen, *K* ein anderer

im Raume angenommener Punkt, aus jedem Winkel *A, B, C, D,* ziehe man zwey grade Linien, eine nach *F,* die andere nach *K,* dann haben wir

$$\overline{AK}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FK}^2 - 2\overline{AF}.\overline{FK}\cos A\hat{F}K$$
$$\overline{BK}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{FK}^2 - 2\overline{BF}.\overline{FK}\cos B\hat{F}K$$

u. ſ. w.

addirt man dieſe Gleichungen, und nennt die Zahl der Winkel des Vielecks *n,* ſo haben wir

$$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 \ldots = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 \ldots . + n.\overline{FK}^2 - 2\overline{FK}(\overline{AF}.\cos A\hat{F}K + \overline{BF}.\cos B\hat{F}K \ldots)$$

aber der Coefficient von $2\overline{FK}$ iſt $= 0$ (273) alſo

$$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 \ldots + n.\overline{FK}^2$$

w. z. b. w.

275. Daraus folgt, daſs die Summe der Quadrate der Entfernungen, aller Winkel eines Polygons, vom Punkt ihrer mittleren Entfernungen ein Kleinſtes iſt, d. h. kleiner als die Summe der Quadrate der Entfernungen eben dieſer Winkel, von jedem andern willkührlich im Raume angenommenen Punkte, denn $\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 \ldots$ muſs am kleinſten ſeyn, wo $FK = 0$, weil $\overline{FK}^2$, eben weil es ein Quadrat iſt, nicht negativ werden kann.

276. Man kann eben ſo wie in (272) den vorigen Lehrſatz auf jedes Syſtem von Punkten anwenden, eben ſo folgenden Satz daraus ſchlieſsen.

277. Wenn man im Raum ein beliebiges Syſtem von Punkten hat, und ſich eine ſphäriſche Oberfläche vorſtellt von beliebigem Durchmeſſer, deren Mittelpunkt der Punkt der mittleren Entfernungen für

alle Punkte des Syſtems iſt, ſo wird die Summe der Quadrate der Entfernungen eben dieſer Punkte, von einem andern beliebig auf der Oberfläche der Kugel angenommenen Punkte gleich der Summe der Quadrate der Entfernungen eben dieſer Punkte des vorgenommenen Syſtems vom Mittelpunkt der Kugel (d. h. vom Punkte der mittleren Entfernungen) ſeyn, wenn man dazu das Quadrat des Radius dieſer Kugel multiplicirt, mit der Zahl der im Raum angenommenen Punkte addirt.

Alſo iſt dieſe Summe dieſelbe für alle Punkte der Kugeloberfläche. Befinden ſich die im Raume angenommenen Punkte in derſelben Ebene, ſo kann man ſtatt der Kugel einen Kreis nehmen, und der Satz bleibt wahr.

Bilden dieſe Punkte die Scheitelpunkte eines ordentlichen Vielecks, ſo hat man folgenden Satz.

278. Die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Winkel eines regelmäſsigen Vielecks, von einem beliebigen Punkte eines Kreiſes, der mit dem Vieleck einerley Mittelpunkt hat, iſt gleich der Summe des Quadrats des Halbmeſſers des Vielecks, und des Quadrats des Halbmeſſers des Kreiſes, wenn man dieſe Summe mit der Zahl der Winkel des Vielecks multiplicirt.

Dieſe Folge des vorigen Satzes iſt merkwürdig,

weil man ſie als eine Ausdehnung des pythagoräiſchen Lehrſatzes betrachten kann.

In der That AKB (Fig. 100.) ſey ein Kreis, deſſen Mittelpunkt ich im Punkte O annehme, wir wollen zwey um 180° entfernte Punkte, A, B, darauf beſtimmen. Zieht man nun zu einem 3ten willkührlich angenommenen Punkte K die Linien AK, BK, ſo iſt $\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 =$ 4mal dem Quadrate des Halbmeſſers und folglich conſtant, wo auch K im Kreiſe liegen mag.

Theilt man den Kreis in 3 gleiche Theile in den Punkten A, B, C, (Fig. 101.) und nimmt noch einen willkührlichen Punkt K im Umfange an, ſo iſt nach dem vorigen Satze

$$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 = 6 . R^2$$

alſo auch conſtant.

Theilt man den Kreis in 4, 5, 6 oder überhaupt in n gleiche Theile (Fig. 102, 103.) und nimmt willkührlich auf dem Umfange einen neuen Punkt K, ſo wird die Summe der Quadrate der geraden Linien, aus K nach den Winkelpunkten gezogen, immer conſtant ſeyn, nemlich $= 2n . R^2$.

Beſchreibt man einen andern dem vorigen concentriſchen Kreis, von gröſserem oder kleinerem Halbmeſſer, ſo folgt aus demſelben Satze, daſs, wenn man auf dieſem neuen Umkreis einen Punkt K nimmt, und aus allen Winkeln des Vielecks dahin grade Linien zieht, die Summe der Quadrate dieſer Linien noch conſtant ſeyn wird, wohin man auch den Punkt K, den Umfang des neuen Kreiſes, ſetzt. Daſſelbe iſt

der Fall mit eingeſchriebenen Vielecken, die nur ſymmetriſch ſind.

Endlich kann man daſſelbe von regulairen, oder ſymmetriſchen Polyedern behaupten, die auf eine Kugeloberfläche bezogen werden, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Polyeders zuſammenfällt, und das iſt offenbar nur eine neue Ausdehnung des pythagoräiſchen Satzes.

Eben ſo wenn man in einem Kreiſe ein Vieleck beſchreibt und auſserhalb im Raume einen Punkt annimmt, ſo iſt die Summe der Quadrate der Entfernungen dieſes Punktes, von allen Winkeln des Vielecks conſtant, wie auch das Vieleck im Kreiſe liegen mag, wenn es nur immer eingeſchrieben bleibt.

Eben das iſt für regulaire umſchriebene Vielecke wahr, oder im Allgemeinen für alle Vielecke, die einen Mittelpunkt der Figur haben, der im Mittelpunkt des Kreiſes liegt.

Eben das iſt der Fall für regulaire Polyeder, oder ſolche, die einen Mittelpunkt der Figur haben, mögen ſie nun in oder um der Kugel beſchrieben ſeyn. Die ſchon oft erwähnte Summe bleibt dieſelbe, wo auch das Polyeder in oder um der Kugel liegen mag, wenn es nur immer eingeſchrieben, oder umgeſchrieben bleibt.

279. Stellt man ſich vor, daſs man aus einem in der Ebene eines Kugelſchnittes gegebenem Punkte, 4 Linien an die Endpunkte zweyer beliebigen verbundenen Durchmeſſer ziehe, ſo wird die Summe der Quadrate dieſer 4 Linien immer conſtant ſeyn, wie ſich auch die Durchmeſſer verändern (in demſel-

ben Kegelſchnitt) und zwar gleich der Summe aus dem doppelten Quadrate der groſsen Axe, dem doppelten Quadrate der kleinen Axe, und der vierfachen Entfernung des betrachteten Punktes vom Mittelpunkt der Curve: denn der Mittelpunkt der Curve iſt auch der Punkt der mittleren Entfernungen der 4 Punkte, die die verbundenen Durchmeſſer begränzen.

Eben ſo kann man beweiſen, daſs die Summe der Quadrate, der Entfernungen des gegebenen Punktes von den 4 Winkeln eines um den Kegelſchnitt beſchriebenen Parallelogramms immer dieſelbe iſt, wie auch dieſs Parallelogramm ſich ändert.

280. Bezieht man alle andere Punkte des Syſtems auf einen unter ihnen, ſo ſieht man, daſs die Summe der Quadrate der Entfernungen dieſes Punkts von allen andern, gleich der Summe der Quadrate der Entfernungen aller dieſer andern Punkte vom Punkte der mittlern Entfernungen des allgemeinen Syſtems iſt, wenn man dazu das Quadrat der Entfernung des erſten dieſer Punkte vom Punkte der mittleren Entfernungen multiplicirt, mit der Zahl der Punkte des allgemeinen Syſtems addirt.

Verfährt man ſo für alle Punkte des Syſtems, und addirt die Gleichungen, ſo kann man ſchlieſsen.

Sieben und zwanzigſter Lehrſatz.

Hat man im Raume eine beliebige Anzahl Punkte, und verbindet man ſie alle zwey und zwey durch grade Linien, ſo wird die Summe der Quadrate aller dieſer

Linien gleich ſeyn der Summe der Quadrate der Entfernungen aller Punkte des betrachteten Syſtems, vom Punkte der mittleren Entfernungen, wenn man dieſe Summe mit der Zahl dieſer Punkte multiplicirt.

281. In einem Dreyecke iſt, wie man leicht überſieht, der Punkt der mittleren Entfernungen derjenige Punkt, wo ſich die 3 aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden halben Seiten gezogenen Linien ſchneiden. Alſo iſt die Summe der Quadrate der Entfernungen dieſes Punktes von den 3 Winkeln, gleich einem Drittel von der Summe der Quadrate der 3 Seiten eben dieſes Dreyecks.

Bey einem gleichſeitigen Dreyeck alſo, wenn man die erſte Entfernung b nennt, und die Seite a, hat man

$$bb = \frac{aa}{3} \text{ oder } b = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

eine bekannte Eigenſchaft.

282. In einer 3 eckigten Pyramide iſt der Punkt der mittleren Entfernungen der 4 Scheitel, derjenige, wo ſich die 4 Transverſalen kreuzen, die man aus jedem Scheitel auf den Punkt der mittleren Entfernungen der Scheitelpunkte der gegenüberſtehenden Grundfläche zieht. Dieſer Punkt muſs alſo vom Scheitel um $\frac{3}{4}$ der Transverſale entfernt ſeyn, die von eben dieſem Scheitel ausgeht. Es iſt alſo nach dem vorigen Satze die Summe der Quadrate der Entfernungen jedes dieſer Scheitelpunkte vom Punkte ihrer mittleren

Entfernungen, gleich einem Viertel der Summe der Quadrate der 6 Kanten der Pyramide.

283. Hat irgend ein Syſtem von Punkten, einen Mittelpunkt der Figur, ſo muſs der auch der Punkt der mittleren Entfernung aller dieſer Punkte ſeyn.

284. Man weiſs, daſs in jedem Parallelogramm die Summe der Quadrate der beyden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der 4 Seiten iſt. Eben dieſer Satz läſst ſich augenſcheinlich aus dem vorigen Satze herleiten.

285. Legendre hat in ſeinen Elémens de géométrie gezeigt, daſs in jedem Parallelepipedum die Summe der Quadrate der 4 Diagonalen, gleich der Summe der Quadrate der 12 Kanten iſt. Eben das leitet man aus dem vorigen Satz durch ſehr leichte Reduktionen ab.

286. Man kann dieſe Sätze auf alle Polygone und Polyeder erſtrecken, die einen Mittelpunkt der Figur haben. Es ſey z. B. *ABCDEF* (Fig. 104.) ein Sechseck, in dem *K* der Mittelpunkt der Figur iſt, d. h. ein ſolcher Punkt, daſs die 3 Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ alle in demſelben Punkte *K* in zwey gleiche Theile getheilt werden; dann iſt die Summe der Quadrate dieſer 3 Diagonalen gleich zweymal der Summe der Quadrate der 6 Seiten, und der Quadrate der Diagonalen, die nicht durch *K* gehen.

Nennt man die Summe der Quadrate der 6 Seiten, und der 6 Diagonalen, die nicht durch den Punkt *K* gehen, $= C$,

Die Summe der Quadrate der 3 Diagonalen, die durch K gehen, $= D$,

alſo die Summe der Quadrate der 6 halben Diagonalen $= \frac{D}{2}$ ſo haben wir

$$C + D = 6 . \frac{D}{2}$$

oder $C = 2D$ w. z. b. w.

Behandelt man jedes andere Polygon oder Polyeder, das einen Mittelpunkt der Figur, und eine grade Anzahl Scheitelpunkte hat ($= 2n$) eben ſo, ſo kann man allgemein beweiſen, daſs

$$C = (n - 1) . D$$

So iſt z. B. in jedem Octaeder, das einen Mittelpunkt der Figur hat, d. h. deſſen 3 Diagonalen ſich in einem Punkte ſchneiden, der ſie auch in zwey gleiche Hälften theilt, die Summe der Quadrate dieſer 3 Diagonalen gleich der halben Summe der Quadrate der 12 Kanten des Octaeders.

287. Es iſt auch ein bekannter Satz, daſs in jedem rechtwinklichtem Parallelogramm die Summe der Quadrate der Entfernungen, eines Punktes ſeiner Ebene, von 2 diagonal entgegengeſetzten Winkeln, gleich der Summe der Quadrate der Entfernungen deſſelben Punkts von den beyden andern Winkeln iſt. Es iſt einerley, ob man den Punkt innerhalb oder auſserhalb des Parallelogramms annimmt. Man kann das ſehr leicht aus Betrachtung des Punktes der mittleren

Entfernungen beweifen, und es dadurch noch auf jeden im Raume angenommenen Punkt ausdehnen.

Eben ſo findet man, daſs, wenn man von einem im Raume angenommenen Punkte, zu den Endpunkten einer Diagonale eines rechtwinklichten Parallelepipedum 2 Linien zieht, die Summe der Quadrate dieſer beyden Linien für jede Diagonale dieſelbe ſeyn wird.

288. Wir ſahen oben (280), wie man, wenn die Entfernungen unter einander in einem Syſtem von Punkten gegeben ſind, die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen vom allgemeinen Punkt der mittleren Entfernungen finden kann. Wir wollen jetzt unterſuchen, wie man für jeden einzelnen Punkt ſeine Entfernung findet.

Wir wollen uns irgend ein Syſtem von Punkten im Raume vorſtellen (Fig. 105.). K ſey der allgemeine Punkt der mittleren Entfernungen, A einer der Punkte, $N =$ ihrer Anzahl,

$P =$ der Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes A von jedem der andern,

$Q =$ der Summe der Quadrate der Entfernungen aller Punkte des Syſtems 2 und 2 verglichen.

Man ſoll alſo $\overline{AK}$ in Werthen von N, P, Q finden.

Wenn man die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Punkte des Syſtems vom Punkte der

mittleren Entfernungen R nennt, so hat man (274) und (280)

$$R = P - N \cdot \overline{AK}^2$$

$$R = \frac{Q}{N}$$

also

$$\overline{AK}^2 = \frac{N \cdot P - Q}{NN}$$

also

Acht und zwanzigster Lehrsatz.

289. In einem System gegebener Punkte ist das Quadrat der Entfernung eines unter ihnen, vom allgemeinen Punkte der mittleren Entfernungen, gleich der Summe der Quadrate der Entfernungen dieses Punktes von allen andern, multiplicirt mit der Zahl der Punkte des Systems, wenn man von diesem Produkt die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Punkte zwey und zwey verglichen abzieht, und diese Differenz durch das Quadrat der Zahl der Punk dividirt.

Will ich z. B. im Dreyeck ABC besonders die Entfernung $\overline{AD}$ des Punktes A vom Punkte der mittleren Entfernungen D haben, so habe ich

$$\overline{AD}^2 = \frac{3(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) - (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2)}{9}$$

$$= \tfrac{1}{9}(2\,\overline{AB}^2 + 2 \cdot \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)$$

Eben so ist in einer 3eckigten Pyramide das Quadrat der Entfernungen eines ihrer Scheitelpunkte vom Punkte der mittlern Entfernungen, gleich 3mal der Summe der Quadrate der 3 Kanten, die von diesem Scheitel ausgehen, weniger der Summe der Quadrate der 3 Kanten der Grundfläche alles durch 16 dividirt.

Man kann diese Theorie ausdehnen, wenn man das allgemeine System in partiale Systeme auflöst, und die Verhältnisse untersucht, die zwischen den respektiven Entfernungen der besondern Mittelpunkte der partialen Systeme bestehen.

Bezieht man das System auf 3 rechtwinklichte Ebenen, so würde man den Punkt der mittleren Entfernungen sehr vortheilhaft als Anfangspunkt der Coordinaten wählen. Denn stellt man sich 3 senkrechte Ebenen vor, die durch den Punkt K gehen, und nennt x, y, z die Entfernungen des Punktes A von diesen 3 Ebenen, so hat man

$$AK^2 = xx + yy + zz$$

also hat man auch (288)

$$xx + yy + zz = \frac{NP - Q}{NN}$$

die man als eine Lineargleichung betrachten darf, da weder x, noch y, noch z u. s. w. sondern nur xx, yy, zz u. s. w. darin vorkommen.

Neun und zwanzigster Lehrsatz.

290. In jedem Viereck, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, ist die Summe der Qua-

Quadrate der beyden Diagonalen gleich der doppelten Summe der Quadrate der beyden graden Linien, die die Mittelpunkte der gegenüberſtehenden Seiten verbinden.

Es ſey $ABDC$ (Fig. 107.) das Viereck, m, n, p, q, die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, man ſoll beweiſen, daſs

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{mn}^2 + \overline{pq}^2)$$

Wenn wir die 4 Linien $\overline{mp}$, $\overline{pn}$, $\overline{nq}$, $\overline{qm}$ ziehen, ſo werden dieſe 4 Linien ein Parallelogramm bilden, noch mehr die Seiten, $\overline{mp}$, $\overline{nq}$, werden der Diagonale $\overline{BC}$ parallel und $= \frac{1}{2}\overline{BC}$ ſeyn. Eben ſo $\overline{mq}$, $\overline{np}$ parallel und gleich $\frac{1}{2}\overline{AD}$.

Man hat alſo

$$\overline{BC}^2 = 4\overline{mp}^2 = 2\overline{mp}^2 + 2\overline{nq}^2$$

und eben ſo

$$\overline{AD}^2 = 2\overline{mq}^2 + 2\overline{pn}^2$$

alſo

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 2(\overline{mp}^2 + \overline{nq}^2 + \overline{mq}^2 + \overline{pn}^2)$$

oder wegen der Parallelogramme

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 2(\overline{mn}^2 + \overline{pq}^2)$$

Da in dieſer Gleichung nur Quantitäten in der zweyten Potenz vorkommen, ſo iſt ſie auf alle correlative Syſteme anwendbar, d. h. auf alle Formen der Vierecke, alſo auch wenn man das als entgegengeſetzte Seiten nimmt, was wir für Diagonalen angenommen haben. Man kann alſo auch den Satz ſo ausſprechen:

In jedem Viereck, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, iſt die Summe der

Quadrate zweyer gegenüberſtehenden Seiten gleich der doppelten Summe des Quadrats der Linie, die die Mittelpunkte der beyden andern Seiten verbindet, und des Quadrats der Linie, die die Mittelpunkte der beyden Diagonalen verbindet.

Nennt man alſo z. B. zwey beliebige gegenüberſtehende Seiten eines Vierecks, m'' die Linie, die ihre Mittelpunkte verbindet

n, n', n'' die beyden andern Seiten, und die Linie, die ihre Mittelpunkte verbindet,

p, p', p'', die beyden Diagonalen, und die Linie, die ihre Mittelpunkte verbindet,

ſo hat man

$$m^2 + m'^2 = 2(n''^2 + p''^2) \ldots (A)$$
$$n^2 + n'^2 = 2(m''^2 + p''^2) \ldots (B)$$
$$p^2 + p'^2 = 2(m''^2 + n''^2) \ldots (C)$$

Addirt man alle dieſe 3 Gleichungen, ſo hat man

$$m^2 + m'^2 + n^2 + n'^2 + p^2 + p'^2 = 4(m''^2 + n''^2 + p''^2)$$

d. h.

In jedem Vierecke, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, iſt die Summe der Quadrate der 4 Seiten, und 2 Diagonalen, gleich der 4fachen Summe, der Quadrate der Linien, die die Mittelpunkte der gegenüberſtehenden Seiten verbinden, und der Linie, die die

Mittelpunkte ihrer Diagonalen verbindet.

Addirt man (A) und (B) und zieht man (C) davon ab, so hat man

$$m^2 + m'^2 + n^2 + n'^2 = p^2 + p'^2 + 4p''^2$$

d. h.

In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate der 4 Seiten, gleich der Summe der Quadrate der beyden Diagonalen, und des 4fachen Quadrates der Linie, die die Mittelpunkte der beyden Diagonalen verbindet.

Euler gab diesen eleganten Satz in den Petersburger Commentarien, wobey ich nur noch bemerke, dass er sich auf alle Vierecke, mögen sie in einer Ebene liegen oder nicht, und auf alle ihre Formen erstreckt, wie man schon daraus sieht, dass in der Gleichung nur Quadrate vorkommen.

291. Dieser Satz kann nicht allein auf Vierecke von aller Art angewandt werden, sondern man kann ihn auch auf Körper erstrecken, deren Seitenflächen beliebige Vielecke sind, z. B. auf eine viereckigte Pyramide, die parallel oder schief mit der Grundfläche geschnitten ist, oder überhaupt auf jedes Hexaeder.

Dreyssigster Lehrsatz.

In jedem Hexaeder, sey es regelmäfsig oder nicht, ist die Summe der Quadrate der 12 Kanten, und die Summe der Quadrate der 12 Diagonalen der Seitenflächen, gleich der dreyfachen Summe der Quadrate der 4 Diagonalen, die den Körper

durchſchneiden, und der vierfachen Summe der Quadrate der 6 Linien, die zwey und zwey, die Mittelpunkte der 4 letzten Diagonalen verbinden.

Da die Summe der Quadrate der Diagonalen jeder Seitenfläche (291) gleich der doppelten Summe der Quadrate der beyden Linien iſt, die die gegenüberſtehenden Seiten 2 und 2 verbinden, ſo kann man den vorigen Satz auch ſo ausdrücken:

In jedem Hexaeder iſt die 3fache Summe der Quadrate der 4 Diagonalen, die durch den Körper gehen, und die 4fache Summe der Quadrate der 6 Linien, die zwey und zwey die 4 Mittelpunkte dieſer Diagonalen verbinden, gleich der Summe der Quadrate, der 12 Seitenflächen, und der doppelten Summe der Quadrate der 12 Linien, die zu zweyen die Mittelpunkte der jeder Seitenfläche gegenüberſtehenden Seiten verbinden.

Man ſieht leicht, daſs dieſer Satz nur eine Ausdehnung des von Legendre gegebenen (285) iſt.

292. Bemerkt man, daſs bey allen dieſen Sätzen nur auf das Quadrat erhobene Quantitäten vorkommen, ſo ſieht man leicht, daſs ſie auf alle möglichen Syſteme anwendbar ſind, d. h. daſs alles, was wir von den Kanten und Diagonalen eines beliebigen Hexaeders geſagt haben, allgemein von den Entfernungen 8 beliebig im Raume angenommener Punkte gelten muſs. Seiten können Diagonalen, Diagonalen Seiten werden u. ſ. w. Solcher Verſetzungen ſind 2520

möglich, der einzige dreyſsigſte Lehrſatz alſo auf irgend ein Hexaeder angewandt, giebt 2520 Gleichungen, die alle verſchieden ſind.

In der That kann man auf Polyeder anwenden, was wir von Vierecken geſagt haben. Wir bemerkten, daſs, wenn die 4 Scheitelpunkte gegeben ſind, man aus den Linien, die ſie zu zweyen verbinden, 3 Vierecke bilden kann, wenn wir dieſen Ausdruck im allgemeinſten Sinn nehmen. Eben ſo können wir, wenn wir Polyeder im allgemeinſten Sinn nehmen, aus n Punkten

$$\frac{(n-1)\,(n-2)\ldots 1}{2}$$

Polyeder zuſammenſetzen (alſo für $n = 8$, erhält man $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ Polyeder).

293. Die 8 gegebenen Scheitelpunkte ſeyen A, B, C, D, E, F, G, H. Als Maaſsſtab zur Vergleichung wollen wir z. B. das Hexaeder annehmen (Fig. 108.), wo $ABCD$ eine Seitenfläche, $EFGH$, die gegenüberſtehende Grundfläche, und $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{GC}$, $\overline{DH}$, die 4 Kanten ſind, die die beyden entgegengeſetzten Grundflächen trennen. Die 4 Diagonalen, die durch den Körper gehen, ſind alſo $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$.

Drücken wir alſo, der Kürze wegen, durch $\overline{\frac{1}{2}AG, \frac{1}{2}GH}$ die grade Linie aus, die die Mittelpunkte von $\overline{AG}$, $\overline{GH}$ verbindet u. ſ. w. ſo kann man den dreyſsigſten Lehrſatz ſo in Gleichung ſetzen:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{DH}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{EH}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{EG}^2 + \overline{FH}^2 = 3\overline{AG}^2 + 3\overline{BH}^2 + 3\overline{CE}^2 + 3\overline{DF}^2 + 4\left(\overline{\tfrac{1}{2}AG, \tfrac{1}{2}BH}\right)^2 + 4\left(\overline{\tfrac{1}{2}AG, \tfrac{1}{2}CE}\right)^2 + 4\left(\overline{\tfrac{1}{2}AG, \tfrac{1}{2}DF}\right)^2 + 4\left(\overline{\tfrac{1}{2}BH, \tfrac{1}{2}CE}\right)^2 + 4\left(\overline{\tfrac{1}{2}BH, \tfrac{1}{2}DF}\right)^2 + 4\left(\overline{\tfrac{1}{2}CE, \tfrac{1}{2}DE}\right)^2$$

Alle correlativen Gleichungen deſſelben Syſtems erhält man aus dieſer Urgleichung, wenn man nur nach Erforderniſs, die Buchſtaben *A, B, C, D, E, F, G, H,* verwechſelt, ohne etwas an den Zeichen zu ändern.

Ein und dreyſsigſter Lehrſatz.

§94. In jedem Vieleck, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, und in jedem Polyeder, iſt die Summe der Quadrate der graden Linien, die zu zweyen die Mittelpunkte der Seiten und Diagonalen verbinden, der vierte Theil der Summe der Quadrate dieſer Seiten und Diagonalen, multiplicirt mit der Zahl der Scheitelpunkte des Polyeders, oder Vielecks, wenn man zuvor 2 davon abgezogen hat,

d. h. wenn

n = Zahl der Scheitelpunkte des Polygons oder Polyeders,

D = Summe der Quadrate ſowohl der Seiten als der Diagonalen,

d = Summe der Quadrate der Linien, die

zu zweyen die Mittelpunkte der Seiten und Diagonalen verbinden,

ſo hat man immer

$$d = \tfrac{1}{4}(n-2)\,D$$

Im Dreyecke z. B. hat man $n=3$, alſo $d=\frac{1}{4}D$

Hat man $n=4$, ſo wird die Gleichung $d=\frac{1}{2}D$, d. h. ein Viereck, iſt die Summe der Quadrate der 15 Linien, die zu zweyen die Mittelpunkte der Seiten und Diagonalen verbinden, gleich der halben Summe der Quadrate dieſer Seiten und Diagonalen.

Die Wahrheit des Satzes folgt leicht aus dem vorigen (ſiehe auch 296.).

295. Man kann dieſe Theorie noch allgemeiner machen, und eine Menge intereſſanter Folgen aus ihr ziehen.

Wir wollen ein beliebiges Syſtem von Punkten A, B, C, D, E u. ſ. w. annehmen, deren Anzahl $=n$

a'', b'', c'' ſollen die Punkte der mittleren Entfernung aller Punkte A, B, C . . . . zu zweyen genommen, ſeyn: alſo die Mittelpunkte der Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, u. ſ. w.

a''', b''', c''' ſollen die Punkte der mittleren Entfernung aller Punkte zu dreyen betrachtet ſeyn, d. h. die Punkte der mittleren Entfernung der Syſteme (A, B, C), (A, B, D), (B, C, D) u. ſ. w.

a'''', b'''', c'''' ſollen die Punkte der mittleren Entfernung u. ſ. w. — ſeyn

. . . . . .

Endlich ſey K der allgemeine Punkt der mittleren Entfernungen der Punkte A, B, C, D, u. ſ. w.

x, x'', x''' ſollen Entfernungen wie

$\overline{AK}$, $\overline{BK}$, $\overline{CK}$. u. ſ. w.

$\overline{a''K}$, $\overline{b''K}$, $\overline{c''K}$. u. ſ. w.

$\overline{a'''K}$, $\overline{b'''K}$, $\overline{c'''K}$. u. ſ. w bedeuten.

X, X'', X''', Entfernungen wie

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$

$\overline{a''b''}$, $\overline{a''c''}$, $\overline{b''c''}$

$\overline{a'''b'''}$, $\overline{a'''c'''}$, $\overline{b'''c'''}$ u. ſ. w.

Σ bedeute die Summe.

Man ſieht gleich anfangs, daſs, der allgemeine Punkt K der mittleren Entfernungen, derſelbe für die Punkte a'', b'', c'' u. ſ. w. a''', b''', c''' u. ſ. w. iſt.

Eben ſo leicht überſieht man, daſs, wenn die Zahl der Punkte A, B, C u. ſ. w. $= n$ iſt, die Zahl der Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ u. ſ. w. und folglich die Zahl der Punkte a'', b'', c'' u. ſ. w. $= \frac{n.(n-1)}{2}$ ſeyn muſs, ſo wie die Zahl der Syſteme von 3 Punkten (A, B, C), (A, B, D) u. ſ. w., und folglich ihrer Mittelpunkte a''', b''', c'''

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}$$

u. ſ. w.

Wir haben alſo folgende Formeln (280.):

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma X^2 &= n\,\Sigma x^2 \\
\Sigma X'^2 &= \frac{n.(n-1)}{2}\,\Sigma x'^2 \\
\Sigma X''^2 &= \frac{n.(n-1).(n-2)}{2\cdot 3}\,\Sigma x''^2 \\
\Sigma X'''^2 &= \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\,\Sigma x'''^2 \\
&\text{u. ſ. w.}
\end{aligned}\right\}\ (A)$$

296. Wir haben

$$(\overline{AK}^2+\overline{BK}^2)=(\overline{Aa''}^2+\overline{Ba''}^2)+2\overline{a''K}^2$$

oder

$$=\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2+2\overline{a''K}^2$$

Wir wollen eine ähnliche Gleichung, für alle Punkte des Syſtems, zu zweyen verglichen annehmen, und alle dieſe Gleichungen, deren Zahl $=\frac{n.(n-1)}{2}$ ſeyn wird, addiren, ſo ſieht man leicht, daſs, wenn jede der Quantitäten wie $\overline{AK}$, $\overline{BK}$ u. ſ. w. durch x, jede Quantität wie AB durch X und jede Quantität wie $a''K$ durch x'' vorgeſtellt wird, die aus obiger Summe entſpringende Gleichung

$$(n-1)\,\Sigma x^2=\tfrac{1}{2}\Sigma X^2+2\,\Sigma x''^2$$

ſeyn wird.

Eben ſo haben wir

$$(\overline{AK}^2+\overline{BK}^2+\overline{CK}^2)=(\overline{Aa'''}^2+\overline{Ba'''}^2-\overline{Ca'''}^2)+3\overline{a'''K}^2$$

oder

$$=\tfrac{1}{3}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2)+3\overline{a'''K}^2$$

Aehnliche Gleichungen ſollen für alle Punkte des Syſtems, zu 3en verglichen, ſtatt finden, und dieſe Gleichungen (deren Zahl $= \frac{n.(n-1)}{2} \frac{(n-2)}{3}$) wollen wir addiren, ſo erhalten wir offenbar die Formel

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \Sigma x^2 = \frac{n-2}{3} \Sigma X^2 + 3\,\Sigma x'''^2$$

Betrachtet man die 4 Punkte A, B, C, D, ſo hat man

$$(\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 + \overline{DK}^2) = \tfrac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2) + 4\,\overline{a'''K}^2$$

woraus man wie vorhin

$$\frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{2 \cdot 3} \Sigma x^2 = \frac{(n-2)\,(n-3)}{2 \cdot 4} \Sigma X^2 + 4\,\Sigma x''''^2$$

zieht.

Wir haben alſo folgende Reihe von Formeln:

$$\left.\begin{array}{l}
(n-1)\,\Sigma x^2 = \frac{1}{2}\Sigma X^2 + 2\,\Sigma x''^2 \\
\frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \Sigma x^2 = \frac{n-2}{3} \Sigma X^2 + 3\,\Sigma x'''^2 \\
\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2 \cdot 3} \Sigma x^2 = \frac{(n-2)\,(n-3)}{2 \cdot 4} \Sigma X^2 + 4\,\Sigma x''''^2 \\
\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \Sigma x^2 = \frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 5} \Sigma X^2 + 5\,\Sigma x'''''^2 \\
\text{u. ſ. w. u. ſ. w.}
\end{array}\right\} \text{(B)}$$

Das Geſetz dieſer Formeln iſt leicht zu überſehen, bis etwa auf den Coefficienten von ΣX^2. Um ihn zu beſtimmen, bildet man eine Reihe Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{6}{4}, \frac{10}{5}, \frac{15}{6}, \frac{21}{7} \text{ u. f. w.}$$

deren Zähler die Triangularzahlen, und deren Nenner die natürlichen Zahlen ſind. Eben ſo bildet man die Reihe

$$1, \frac{n-2}{3}, \frac{(n-2)\,(n-3)}{3\cdot 4}, \frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{3\cdot 4\cdot 5}$$

u. ſ. w.

und multiplicirt das erſte Glied der obern Reihe mit dem erſten der untern, das zweyte Glied mit dem zweyten u. ſ. w. woraus die Reihe der Coefficienten von ΣX^2 entſteht.

Wir haben $\Sigma X^2 = n\,\Sigma x^2$, ſubſtituirt man in den vorigen Formeln dieſen Werth, ſo kommt

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Sigma x'^2 &= \left\{(n-1) - \frac{n}{2}\right\}\Sigma x^2 \\ 3\,\Sigma x'''^2 &= \left\{\frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \frac{n.(n-1)}{3}\right\}\Sigma x^2 \\ 4\,\Sigma x''''^2 &= \left\{\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{n.(n-1)\,(n-3)}{2\cdot 3}\right\} \\ &\Sigma x^2 \\ &\text{u. ſ. w.} \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

Durch dieſe Formeln und diejenigen, die wir (289) gefunden haben, hat man offenbar das unmittelbare Verhältniſs aller Quantitäten Σx^2, ΣX^2, $\Sigma x'^2$, $\Sigma X'^2$ u. ſ. w. zu zweyen betrachtet, durch eine Gleichung des erſten Grades, die nur 2 Glieder hat. Die erſte Formel in (C) iſt nichts, als der algebraiſche Ausdruck des ein und dreyſsigſten Lehrſatzes (294).

297. Man erkennt leicht in dem, was wir über den Punkt der mittleren Entfernungen geſagt haben,

die Eigenſchaften des Schwerpunktes in der Mechanik, und in der That ſind ſie identiſch. Man ſieht daraus, daſs dieſer Punkt der Geometrie angehört, und daſs ſeine mechaniſchen Eigenſchaften blos aus denjenigen hergeleitet werden könnten, die die Geometrie lehrt. Uebrigens kennt man ſchon lange (z. B. durch Guldius Satz) den Vortheil, den die Geometrie, aus der Betrachtung des Schwerpunkts ziehen kann, Vortheile, die man aber nicht auf dem natürlichen Wege erhielt. Es ſcheint alſo dieſe Weglaſſung der Lehre vom Punkte der mittleren Entfernungen in den Anfangsgründen der Geometrie eine wahre Lücke zu ſeyn. Die Quellen der Elementargeometrie, die doch die gewöhnlichſte iſt, würden dadurch weit ergiebiger werden, und man könnte viele, für die Anwendung ſehr nützliche Sätze, zu denen ſonſt dieſe Geometrie nur mit Mühe gelangt, einfach und leicht beweiſen.

298. Vielleicht ſollte die Geometrie nicht einmal da ſtehen bleiben, ſondern auch die Bewegungen umfaſſen, die nicht von der wechſelſeitigen Wirkung und Gegenwirkung der Körper entſtehen: denn Mechanik iſt eigentlich nicht die Wiſſenſchaft der Bewegungen, ſondern die Wiſſenſchaft der Mittheilung der Bewegung. Der Begriff der Bewegung iſt eben ſo einfach wie der Begriff der Dimenſionen, und vielleicht ſind beyde unzertrennlich. Schon die erſten Begriffe der Geometrie lehren die Linie als den Weg eines ſich bewegenden Punktes betrachten, und dieſer Begriff ſtimmt mit der materiellen Operation überein, wenn man eine Linie mit der Feder zieht. Eben ſo

wird hier gelehrt die Fläche als aus der Bewegung einer Linie, den Körper als aus Bewegung einer Fläche entſtanden, zu betrachten. Warum ſollten wir nicht weiter gehen, und betrachten, was aus der Bewegung eines Körpers im Raume entſteht? Nicht dieſe Bewegung, an und für ſich betrachtet, macht den Gegenſtand der Mechanik aus, ſondern ſie betrachtet die Wirkung der Modifikationen, die ſie durch den Stoſs anderer Körper, die in ihrer Bahn liegen, erleidet.

Zwey Körper können in Bezug auf einander, auf 3 verſchiedene Arten gedacht werden; ſie können ganz von einander getrennt, und ohne irgend einen Zuſammenhang ſeyn; oder ſie können auf einander durch Stoſs, Druck oder Zug wirken; oder endlich ſie können ſich in bloſser Berührung oder Nebeneinanderſtellung befinden, ohne auf einander zu wirken.

Der erſte Zuſtand gehört ausſchlieſslich der Geometrie an, der zweyte der Mechanik, der dritte iſt gleichſam ein Mittelzuſtand, den man wie den Uebergang aus der einen Wiſſenſchaft in die andere betrachten kann, oder wenn man will, wie eine Ausdehnung der erſten, die der zweyten als Einleitung dient.

Wir wollen uns ein Syſtem von Körpern vorſtellen, die mehrere Berührungspunkte haben, aber ſo, daſs kein Körper auf den andern wirkt. Hier wirft ſich die Frage auf: welchen Bedingungen muſs dieſs Syſtem bey ſeiner Bewegung unterworfen ſeyn, damit die Körper, aus denen es beſteht, in Berührung bleiben, ohne doch den geringſten wechſelſeitigen Ein-

fluſs zu erlangen, ohne ſich in ihren reſpektiven Bewegungen zu hindern und ohne ſich zu trennen? Es verſteht ſich, daſs dieſe Nebeneinanderſtellung immer ohne Druck und Aufhören der Stetigkeit ſtatt finde. Eine ſolche Aufgabe iſt ganz unabhängig von den Geſetzen der Mittheilung der Bewegung, indem ja hier nach der Annahme keine Bewegung mitgetheilt oder geſtört iſt, man kann vielmehr dieſe Bewegungen geometriſche Bewegungen nennen, deren Betrachtung nicht der Mechanik, ſondern der Geometrie gehört, und deren Darſtellung eigentlich nie in der letzten Wiſſenſchaft fehlen ſollte. Die Eigenſchaften dieſer Bewegung, wie ich ſchon ſonſt bemerkt habe, ſind ganz in dem Grundſatz begriffen, daſs, wenn eine ſolche Bewegung bey einem Syſtem von Körpern ſtatt findet, die entgegengeſetzte Bewegung in jedem Augenblicke möglich iſt, welches bey einer nicht-geometriſchen Bewegung nicht ſtatt findet. Zwey ſich berührende Kugeln, z. B. die ſich geometriſch bewegen, d. h. ohne aufzuhören in Berührung zu ſeyn, ſind ſo beſchaffen, daſs ſie in jedem Augenblick ihre Geſchwindigkeiten annehmen können, die dem ſie belebenden Diametral entgegengeſetzt ſind. Das würde nicht ſtatt finden, wenn ihre Bewegungen keine geometriſche wären, d. h. wenn dieſe Geſchwindigkeiten ihre Entfernung bewirkten, weil dann, um die entgegengeſetzte Bewegung zu nehmen, beyde Körper ſich durchdringen müſsten.

Wäre die Theorie dieſer geometriſchen Bewegungen ergründet, ſo würden die Mechanik und Hydraulik unendlich vereinfacht werden. Man würde ſie

ganz auf die Entwickelung des allgemeinen Grundſatzes der Mittheilung der Bewegungen zurückbringen. Die analytiſchen Schwierigkeiten, auf die man in der Wiſſenſchaft des Gleichgewichts und der Bewegung ſtöſst, rühren vorzüglich daher, daſs die Theorie der geometriſchen Bewegungen noch nicht vollendet iſt, eine Theorie, die alſo alle Aufmerkſamkeit der Geometer verdient.

Zwey und dreyſsigſter Lehrſatz.

299. Wenn man aus einem im Raum angenommenen Punkte grade Linien zieht; wovon jede einer andern Seite eines beliebigen Vielecks gleich und parallel iſt, und zwar ſo, daſs dieſe Linien auch im Sinn des Umfangs gezogen ſind, und wenn man aus irgend einem andern im Raume angenommenen Punkte ein Perpendikel auf jede dieſer Linien, oder Radien, ſenkt, ſo wird die Summe der Produkte eines jeden Perpendikels mit dem Segmente des Radius = o, wenn man die Segmente, die nicht auf die Radien ſelbſt, zu denen ſie gehören, ſondern auf ihre Verlängerungen fallen, in inverſem Sinn nimmt.

Es ſey (Fig. 106.) F der Punkt im Raume; $\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, die Radien, die von dieſem Punkte ausgehen, die reſpektive den Seiten eines gegebenen Vielecks parallel und gleich, auch in demſelben Sinn gezogen ſind. Aus dem Punkte K ſind die Perpendikel $\overline{Ka}$, $\overline{Kb}$, $\overline{Kc}$, auf dieſe verſchiedenen Radien geſenkt,

eben so aus den Punkten A, B, C, die Perpendikel AA', BB', CC' auf FK. Die ähnlichen Dreyecke AFA', KFa geben

$$FA : FK = FA' : Fa$$

also

$$FA \cdot Fa = FK \cdot FA'$$

aus demselben Grunde hat man

$$FB \cdot Fb = FK \cdot FB'$$
$$FC \cdot Fc = FK \cdot FC'$$
u. s. w.

Addirt man diese Gleichungen, so kommt

$$FA \cdot Fa + FB \cdot Fb + \text{u. s. w.} = FK(FA' + FB' + \text{u. s. w.})$$

Da nun aber

$$FA' = FA \cdot cos\, A\hat{F}K$$
$$FB' = FB \cdot cos\, B\hat{F}K$$
u. s. w.

so hat man (255)

$$FA' + FB' + FC' - \ldots = 0$$

Es ist also auch

$$FA \cdot Fa + FB \cdot Fb + FC \cdot Fc + \ldots = 0$$

Wenn man diejenigen Segmente Fb u. s. w. negativ nimmt, die wie Fb, Fc, stumpfen Winkeln entsprechen, oder die nicht auf den Radien selbst, sondern auf ihren Verlängerungen im entgegengesetzten Sinne befindlich sind w. n. e. w.

Man sieht leicht die Analogie dieses Satzes, mit der Theorie der virtuellen Geschwindigkeiten in der Mechanik, indem man verschiedene Kräfte, die einen Punkt in verschiedenem Sinn ziehen, immer durch die Seiten eines Vielecks vorstellen kann, so dass

FA,

$\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{FD}$ u. ſ. w. die Kräfte vorſtellen können, die ſich im Gleichgewicht um den Punkt F halten. Stellt man ſich nun vor, daſs F ſich bewege, und daſs ſeine Schnelligkeit, ſowohl in Hinſicht der Gröſse als der Richtung, durch $\overline{FK}$ dargeſtellt werde, ſo werden die Linien $\overline{Fa}$, $\overline{Fb}$, $\overline{Fc}$ u. ſ. w. dieſe Geſchwindigkeit in der Richtung der verſchiedenen Kräfte $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ u. ſ. w. vorſtellen.

Die vorher gefundene Gleichung lehrt uns alſo, daſs die Summe der Produkte einer jeden der Kräfte, die im Gleichgewicht um den Punkt F ſind, mit der Geſchwindigkeit dieſes Punktes, in der Richtung dieſer Kraft gemeſſen, multiplicirt, $= o$ iſt. Das iſt denn nun in der That der allgemeine Grundſatz des Gleichgewichts.

Ich nehme an, daſs alle Kräfte um einen Punkt verſammelt ſeyen. Gäbe es mehrere ſolche Punkte, wie z. B. in einer Maſchine, die aus Seilen zuſammengeſetzt iſt, ſo könnte man auf jeden daſſelbe Raiſonnement anwenden. Da die Spannungen der Stricke, die dieſe Punkte zu zweyen verbinden, für jeden Knoten dieſelben ſind, ſo wie die Geſchwindigkeit der Enden, in der Richtung des Stricks genommen, ſo kommen dieſe Spannungen nicht in die Rechnung, und der Grundſatz iſt allgemein für jede aus Stricken zuſammengeſetzte Maſchine wahr, d. h. für jede Maſchine, weil jede auf eine aus Stricken zuſammengeſetzte zurückgebracht werden kann. Ich gab von dieſem Grundſatz einen vollſtändigen Beweis in meinem

Eſſai ſur les machines en général, 1783.

(Umgearbeitet unter dem Titel: Principes fonda-

mentaux de l'équilibre et du mouvement, Paris 1803 8. erſchienen.)

Sind die Linien $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ u. ſ. w. in einer Ebene, oder ſtellen ſie die Projectionen eines Syſtems von Kräften, das um den Punkt F im Gleichgewicht iſt, auf derſelben Ebene vor, ſo findet man, wenn man die andern Seiten des vorhin betrachteten Dreyecks vergleicht,

$$\overline{FA}.\overline{Ka} + \overline{FB}.\overline{Kb} + \overline{FC}.\overline{Kc} + \ldots = 0$$

wobey man diejenigen von den Kräften $\overline{FA}$ u. ſ. w. die ſich im entgegengeſetzten Sinne um den Punkt F zu drehen ſuchen, als invers betrachtet. Dies iſt denn bekanntlich der Grundſatz in der Theorie der Momente.

Wenn ein Körper von einem beſtimmten Punkt ausgeht, und ſich eine Zeit t hindurch, in einer gegebenen Richtung gleichförmig mit der Geſchwindigkeit v bewegt, dann dieſelbe Zeit t hindurch mit der Geſchwindigkeit v in einer andern Richtung, indem er von dem Punkt, wo er angekommen war, ausgeht, u. ſ. w. ſo kommt er, nach allen dieſen partiellen Bewegungen, auf denſelben Punkt, auf den er gekommen wäre, wenn er ſich während derſelben Zeit t, mit einer aus allen partiellen Geſchwindigkeiten zuſammengeſetzten Geſchwindigkeit bewegt hätte, d. h. dieſe zuſammengeſetzte iſt die letzte Seite des Vielecks, das die andern Geſchwindigkeiten bildeten. Man ſieht daraus, wie wichtig die Theorie der Vielecke für die Mechanik iſt.

Drey und dreyſsigſter Lehrſatz.

300. **Wenn man durch einen Punkt im Raume mehrere Vielecke zieht, von denen jedes der Seitenfläche eines Polyeders gleich, und parallel iſt, auch nach derſelben Seite gewandt, ſo iſt die Summe der Produkte dieſer Vielecke mit den Perpendikeln, die man aus irgend einem Punkte im Raume auf ſie fällt, = o, wenn man die Perpendikel negativ nimmt, die auf die verkehrte Seite dieſer Vielecke fallen.**

Um den Beweis zu führen, wollen wir annehmen, daſs man aus irgend einem Punkte *m* im Innern des Vielecks, eine Linie nach jedem der körperlichen Winkel ziehe, ſo wird das Polyeder in ſo viele Pyramiden zerlegt ſeyn, als es Seitenflächen hat. Alle dieſe Pyramiden haben ihren Scheitel in *m*, und der körperliche Inhalt des Polyeders wird gleich ſeyn einem Drittheil der Summe dieſer Seitenflächen, wenn jede mit dem auf ſie aus *m* gezogenen Perpendikel multiplicirt wird. Eben ſo verfährt man aus einem neuen Punkte *m'*, und erhält wieder eine Summe = o. Zieht man beyde von einander ab, ſo iſt die dreyfache Differenz auch = o.

Stellt man ſich nun vor, daſs dieſs Urſyſtem durch irgend eine Bewegung der Punkte *m* und *m'* ſich ändere, ſo bleiben die Perpendikel in Hinſicht auf das Urſyſtem direkt, ſo lange *m*, *m'*, nicht aus dem innern des Vielecks herauskommen; ſo wie dieſs aber geſchieht, ſind die Perpendikel, die auf die äuſsern Seiten der Seitenflächen fallen, durch o gegangen und

invers geworden, die 3fache Differenz ist also auch $= 0$, wenn die Punkte m, m' ausserhalb des Polyeders liegen, wenn man nur die Perpendikel auf die äussern Seiten negativ nimmt.

Mit leichter Mühe sieht man, dass die Differenz immer $= 0$ bleibt, wenn man die Seitenflächen sich selbst parallel bewegt; sie wird also auch $= 0$ seyn, wenn man sich alle Seitenflächen durch einen Punkt gezogen denkt, es versteht sich, dass jede Seitenfläche auch hier nach ihrer anfänglichen Lage parallel seyn muss.

Stellen wir uns nun vor, dass der Punkt m' in den Punkt fällt, durch den alle Vielecke gezogen sind, so werden alle aus m' gezogene Perpendikel $= 0$, also auch die Summe der Produkte, die sich auf den Punkt m' beziehen, also auch die Summe der Produkte, die sich auf m beziehen, weil diese immer der erstern gleich ist.

301. Da die Projection jedes geschlossenen Vielecks auf eine beliebige Ebene wieder ein geschlossenes Vieleck ist, so ist alles, was wir von einem solchen Vielecke bewiesen haben, auch auf seine Projectionen anwendbar. So kann man, wenn das System auf 3 rechtwinklichte Ebenen bezogen wird, von jedem der Vielecke, welche die 3 Projectionen des betrachteten Vielecks bilden, alles das beweisen, was man vom Vielecke selbst bewies.

Erklärungen.

302. *ABCDEF* (Fig. 109.) sey irgend ein Vieleck, ich werde einen jeden Winkel

wie $B\hat{A}F$ z. B. dem Theile $BCDEF$ des Vielecks gegenüberſtehend nennen, eben ſo ſteht der Winkel $A\hat{B}C$ dem Theile $CDEFA$ des Vielecks gegen über.

Zieht man die Diagonalen $\overline{BF}$, $\overline{AC}$, ſo behaupte ich auch, daſs die Winkel $B\hat{A}F$, $A\hat{B}C$, reſpective den Diagonalen $\overline{BF}$, $\overline{AC}$ gegenüberſtehen.

Eben ſo heiſst der Winkel $C\hat{A}F$ dem Theile $CDEF$ des Vielecks und der Diagonale $\overline{CF}$ gegenüberſtehend, der Winkel $C\hat{A}E$ dem Theile $C\hat{D}E$ des Vielecks und der Diagonale $\overline{CE}$ gegenüberſtehend u. ſ. w.

Zieht man aus den Punkten C, D, nach einem andern Winkel des Vielecks F die Diagonalen $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, ſo heiſst der Winkel $C\hat{F}D$ nach der vorigen Erklärung, ſowohl der Seite $\overline{CD}$, als dem Winkel $C\hat{A}D$ entgegengeſetzt. So ſind jeder Seite des Vielecks ſo viel Winkel entgegengeſetzt, als es Seiten im Vieleck giebt weniger zwey.

Iſt das Vieleck fähig in dem Kreis beſchrieben zu werden, ſo ſieht man leicht, daſs alle Winkel, die derſelben Seite gegenüberſtehen, wie $C\hat{A}D$, $C\hat{F}D$, einander gleich ſind, man kann alſo unter dem der Seite $\overline{CD}$ entgegengeſetzten Winkel, irgend einen der ſich auf $\overline{CD}$ ſtützenden Winkel verſtehen, der ſeinen Scheitel in einem Punkte des Bogens $\overset{\frown}{CBAFE}$ hat. Daraus folgt

In jedem Vieleck, das in einem Kreiſe beſchrieben werden kann, ſind alle Win-

kel, die derſelben Seite gegenüberſtehen, gleich.

Jetzt können wir auch folgenden Satz aufſtellen, der eine Ausdehnung des Grundſatzes der Proportionalität der Seiten eines Dreyecks mit dem Sinus der gegenüberſtehenden Winkel iſt.

Vier und dreyſsigſter Lehrſatz.

303. In jedem Vieleck, das in einem Cirkel beſchrieben werden kann, verhalten ſich die Seiten wie die Sinus der gegenüberſtehenden Winkel d. h. wir haben z. B.

$$\overline{CD} : \overline{EF} = \mathit{ſin}\ C\hat{A}D : \mathit{ſin}\ E\hat{C}F$$

In der That iſt der Radius des Cirkels $= R$, (121)

$$\mathit{ſin}\ C\hat{A}D = \frac{\overline{CD}}{2R}$$

$$\mathit{ſin}\ E\hat{C}F = \frac{\overline{EF}}{2R}$$

alſo

$$\overline{CD} : EF = \mathit{ſin}\ C\hat{A}D : \mathit{ſin}\ E\hat{C}F$$ w. z. b. w.

304. Soll ein Vieleck in dem Cirkel beſchrieben werden können, ſo muſs durchaus ein gewiſſes Verhältniſs zwiſchen ſeinen Winkeln beſtehen. So z. B. im Viereck ſind dann die gegenüberſtehenden Winkel Supplemente.

Die Seitenzahl des eingeſchriebenen Vielecks ſey anfangs 6, es ſey $ABCDEF$ (Fig. 109). Ich ziehe die Diagonale $\overline{BE}$. Im Viereck $BAFE$ ſind die entgegengeſetzten Winkel Supplemente, alſo

$$B\hat{A}F + B\hat{E}F = E\hat{F}A + E\hat{B}A$$

eben so giebt das Viereck $BCDE$

$$B\hat{C}D + B\hat{E}D = E\hat{D}C + E\hat{B}C$$

Addirt man diese beyden Gleichungen und bemerkt, dass

$$A\hat{B}E + E\hat{B}C = A\hat{B}C$$
$$B\hat{E}F + B\hat{E}D = F\hat{E}D$$

so hat man

$$B\hat{A}F + B\hat{C}D + F\hat{E}D = E\hat{F}A + E\hat{D}F + A\hat{B}C$$

Eben so kann man beym 8eck, 10eck u. s. w. verfahren, wir haben also folgenden Lehrsatz.

Fünf und dreyssigster Lehrsatz.

In jedem Vieleck, das eine gerade Anzahl von Seiten hat, und im Kreise eingeschrieben werden kann, ist, wenn man die Winkel 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. bezeichnet, die Summe aller ungeraden gleich der Summe aller geraden.

Ist die Seitenzahl ungerade, so kann man den Scheitel des einen Winkels als eine unendlich kleine Sehne betrachten, so erhält das Vieleck (wenn man diese unendlich kleine Seite mit zählt) eine gerade Seitenzahl, und man kann den Lehrsatz anwenden. Es sey z. B. (Fig. 110.) $ABCDE$ ein eingeschriebenes Fünfeck, wir wollen durch einen Winkel D eine Tangente $\overline{mDn}$ ziehen, wo man den Punkt D als die unendlich kleine 6te Seite betrachten kann. Wir haben also

$$A + C + E\hat{D}m = B + D + C\hat{D}n$$

Ziehen wir nun den Radius $\overline{KD}$, und nennen den rechten Winkel $= \pi$ so haben wir

$$E\hat{D}m = \pi + E\hat{D}K$$
$$C\hat{D}n = \pi + C\hat{D}K$$

alſo ſubſtituirt

$$A + C + E\hat{D}K = B + E + C\hat{D}K$$

Betrachtet man alſo die Theile des Winkels D nemlich $C\hat{D}K$, $E\hat{D}K$ als Winkel des Vielecks, ſo kann man den Lehrſatz auch auf Vielecke von ungerader Seitenzahl ausdehnen.

Sechs und dreyſsigſter Lehrſatz.

305. Es ſollen 3 Kreiſe in einer Ebene gezogen ſeyn, die ich durch 1, 2, 3 unterſcheiden will, die beyden erſten ſollen ſich in den Punkten a, a', ſchneiden, die erſte die 3te in den Punkten b, b', und endlich die 2te die 3te in den Punkten c, c', dann, behaupte ich, werden die 3 Linien $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, ſich in einem Punkte ſchneiden.

aAb (Fig. 111.) ſoll der Kreis 1 ſeyn, aBc der zweyte, bCc der dritte. Jeden dieſer Kreiſe wollen wir als den Schnitt einer Kugel anſehen, die ihren Mittelpunkt in der vorgegebnen Ebene hat, dann wird $\overline{aa'}$ den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt der Kugelflächen 1, 2 auf dieſer Ebene vorſtellen, $\overline{bb'}$ eben das bey 1 und 3, $\overline{cc'}$ eben das bey 2 und 3. Der Punkt alſo, der den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt der 3 Kugelflächen vorſtellt, iſt zu gleicher Zeit in jeder

dieſer 3 Linien, alſo ſchneiden ſich dieſe Linien in einem Punkte.

Man kann auch dieſen Satz directe, ohne Kugeln zu Hülfe zu nehmen, beweiſen, indeſſen ſchien es mir ſo einfacher. Alſo

Wenn 2 Kreiſe $AFBG$, $ACBD$ (Fig. 112.) in derſelben Ebene gezogen ſich in den Punkten A, B ſchneiden, und man die Linie $\overline{AB}$ zieht, dann durch einen Punkt K, der willkührlich auf dieſer Linie genommen iſt, zwey Sehnen $\overline{FG}$, $\overline{CD}$ zieht, eine an den Kreis $AFBG$, die andere an den Kreis $ACBD$, ſo ſind die Punkte F, G, C, D in einem Kreiſe.

Sieben und dreyſsigſter Lehrſatz.

306. In jedem Vielecke $ABCDE$ (Fig. 151.), mag es in einer Ebene liegen oder nicht, wenn man aus irgend einem Punkte im Raume K, an alle ſeine Winkel Linien $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$ u. ſ. w. zieht, hat man

$$\begin{aligned}&\overline{AB}\,.\,\overline{AK}\,\mathrm{cos}\,B\hat{A}K + \overline{BC}\,.\,\overline{BK}\,\mathrm{cos}\,C\hat{B}K\\&\quad + \overline{CD}\,.\,\overline{CK}\,\mathrm{cos}\,D\hat{C}K + \ldots.\\&= \overline{AB}\,.\,\overline{BK}\,\mathrm{cos}\,A\hat{B}K + \overline{BC}\,.\,\overline{CK}\,\mathrm{cos}\,B\hat{C}K\\&\quad + \overline{CD}\,.\,DK\,\mathrm{cos}\,C\hat{D}K + \ldots.\end{aligned}$$

Die bekannten Eigenſchaften der Dreyecke geben

$$\begin{aligned}\overline{AK}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BK}^2 - 2\,\overline{AB}\,.\,\overline{BK}\,.\,\mathrm{cos}\,A\hat{B}K\\-\overline{BK}^2 &= -\overline{AB}^2 - \overline{AK}^2 + 2\,\overline{AB}\,.\,\overline{AK}\,.\,\mathrm{cos}\,B\hat{A}K\\\overline{BK}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{CK}^2 - 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{CK}\,.\,\mathrm{cos}\,B\hat{C}K\\-\overline{CK}^2 &= -\overline{BC}^2 - \overline{BK}^2 + 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{BK}\,.\,\mathrm{cos}\,C\hat{B}K\end{aligned}$$

u. ſ. w.

Addirt und reducirt man, ſo erſcheint die zu beweiſende Formel.

Wir wollen zu jedem der zwey Glieder dieſer Gleichung das zweyte addiren, ſo verwandelt ſich die Formel in

$$\overline{AB}\left\{\overline{AK}.\cos B\hat{A}K+\overline{BK}\cos A\hat{B}K\right\}+\overline{BC}\left\{\overline{BK}\cos.\ C\hat{B}K+\overline{CK}\cos B\hat{C}K+\right\}+\ldots \text{ u. ſ. w.}$$
$$=2\ \overline{AB}.\overline{AK}\cos B\hat{A}K+2\overline{BC}.\overline{BK}\cos C\hat{B}K+2\overline{CD}.\overline{CK}.\cos D\hat{C}K+\ldots.$$

Die Theile aber des erſten Gliedes verwandeln ſich in $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$, $\overline{CD}^2$ u. ſ. w. (251) alſo wird die Formel

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\ldots=2\overline{AB}.\overline{AK}\cos B\hat{A}K+2\overline{BC}.\overline{BK}\cos C\hat{B}K+\ldots..$$

Nimmt man die Seitenzahl unendlich an, ſo wird das Vieleck eine Curve, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ u. ſ. w. deren Elemente, $\overline{AK}$, $\overline{BK}$ u. ſ. w. radii vectores, und $B\hat{A}K$, $C\hat{B}K$, Winkel, die die radii vectores mit den Tangenten machen. Die Quadrate als Gröſsen der zweyten Ordnung verſchwinden, und das erſte Glied wird alſo $=0$. So intereſſante Reſultate aus dieſer Unterſuchung auch hervorgehen, muſs ich ſie doch jetzt beſeitigen, da ſie dem Gegenſtand, den ich jetzt behandle, fremdartig ſind.

Wir wollen unſer Syſtem auf 3 rechtwinklichte Axen beziehen. Wir wollen alſo aus jedem Winkel A, B, C u. ſ. w. und aus K Perpendikel auf dieſe Axen ſenken. Die Perpendikel auf die eine Axe ſollen $a, b, c, d \ldots\ldots k$
die auf die andere $a', b', c', d' \ldots k'$

die auf die dritte a'', b'', c'', $d'' \ldots k''$ heifsen, so haben wir bekanntlich

$$\overline{AB}.\overline{AK}\cos B\hat{A}K = \overline{ab}.\overline{ak} + \overline{a'b'}.\overline{a'k'} + \overline{a''b''}.\overline{a''k''}$$

$$-\overline{AB}.\overline{BK}\cos A\hat{B}K = -\overline{ab}.\overline{bk} - \overline{a'b'}.\overline{b'k'} - \overline{a''b''}.\overline{b''k''}$$

$$\overline{BC}.\overline{BK}\cos C\hat{B}K = \overline{bc}.\overline{bk} + \overline{b'c'}.\overline{b'k'} + \overline{b''c''}.\overline{b''k''}$$

$$- \ldots .$$

u. s. w.

Addirt man alle diese Gleichungen und bemerkt, dafs, nach dem vorigen Satz, das erste Glied $= 0$ wird, so hat man

$$\overline{ab}(\overline{ak} - \overline{bk}) + \overline{a'b'}(\overline{a'k'} - \overline{b'k'}) - \overline{a''b''}(\overline{a''k''} - \overline{b''k''})$$

$$+ \overline{bc}(\overline{bk} - \overline{ck}) + \overline{b'c'}(\overline{b'k'} - \overline{c'k'}) + \overline{b''c''}(\overline{b''k''} - \overline{c''k''}) + \ldots . = 0.$$

Eine merkwürdige Formel, die jedem Vieleck gehört, und ein leichtes Mittel bietet es in Gleichung zu setzen, um nach den Methoden der analytischen Geometrie behandelt zu werden. Uebrigens ist dieser Satz nur ein besonderer Fall eines andern weit allgemeinern, den ich sonst wo entwickeln, und hier nur aussprechen werde.

Stellt man sich im Raume ein System von Punkten vor, die ich durch 1, 2, 3 u. s. w. bezeichne, und die ihre respectiven Stellungen, vermittelst einer Umformung durch unmerkliche Grade verändern, doch so, dafs 1 von 2, 2 von 3, ... der letzte vom ersten immer gleich

weit entfernt bleibe, und projicirt man diese Entfernungen, oder das allgemeine System, auf einer beliebigen Ebene; so ist nach Verlauf einer unendlich kurzen Zeit, die Summe dieser Projectionen, wenn man jede durch die Summe der Perpendikel multiplicirt, die von den beyden Endpunkten der neuen Richtung auf die erste gesenkt werden, = o, wobey man die Perpendikel positiv nimmt, die auf die innern Flächen der Seiten des Vielecks fallen, das durch die Projectionen entstand, negativ, die auf die äussere Seite fallenden.

Fünfter Abſchnitt.

Anwendung der vorigen Theorie auf verſchiedene Unterſuchungen der Elementargeometrie.

307. Man kann, um eine Aufgabe zu löſen, 4 Methoden wählen, die ſynthetiſche, die trigonometriſche, die der analytiſchen Geometrie und die vermiſchte.

1) Die ſynthetiſche Methode ſucht ohne Hülfe der Analyſe, aus den bekannten Eigenſchaften der vorgegebenen Figur, die paſſendſte Conſtruction, um den aufgeſtellten Bedingungen Genüge zu leiſten. Wegen der Unvollkommenheit der Inſtrumente kann dieſe Methode nicht die Genauigkeit der Rechnung erreichen, aber für manche Künſte, z. B. die Baukunſt, iſt ſie die nützlichſte, weil ſie die ſchnellſte iſt. Sie hat auch noch den Vortheil dem Auge des Geiſtes nur wirkliche Gegenſtände zu mahlen, und bietet dem Scharfſinn der Geometer manche nützliche und angenehme Uebung dar. Sind die Theile der zu betrachtenden Figur in verſchiedenen Ebenen, ſo nennt man ſie be-

ſchreibende Geometrie, und behandelt ſie durch Projectionen auf 3 rechtwinklichte Ebenen, nach allgemeinen Grundſätzen. Jeder weiſs, wieviel dieſe Methode Monge'n verdankt.

2) Die trigonometriſche Methode beſteht in der Bildung einer ununterbrochenen Kette von Dreyecken, zwiſchen den gegebenen und unbekannten Theilen der Figur, und durch den Uebergang von dem einen zu den andern vermittelſt der analytiſchen Formeln der Trigonometrie.

3) Die analytiſche Methode behandelt die Aufgaben, blos durch die Mittel, welche die Analyſis bietet, indem ſie nur das, was zum Ausdruck der Bedingungen jeder Aufgabe durchaus nöthig iſt, aus der Geometrie nimmt. Sie bezieht Curven, ganze Syſteme von Linien u. ſ. w. auf rechtwinklichte Coordinaten, indem ſie nach der Beſchaffenheit der Aufgabe die Abſtände von 3 rechtwinklichten Ebenen, oder 2 rechtwinklichten Axen braucht. Man ſieht leicht, daſs, da alles auf Linien zurückgeführt iſt, die Winkel der Figur nur mittelbar durch die geniometriſchen Functionen ausgedrückt werden können.

Bewundernswürdig durch ihr einfaches gleichförmiges Verfahren durch die Allgemeinheit, die ſie ihren Unterſuchungen giebt, ragt die analytiſche Geometrie weit über die andern Methoden hervor. Es laſſen ſich freylich Fälle denken, wo ihre Reſultate verwickelter ſcheinen, als die, die man durch die Elementargeometrie erhält. Z. B. wenn man in einem Syſtem n Linien und $n-1$

unabhängige Winkel kennt und die andern Winkel ſucht, aber man muſs ſich auch erinnern, daſs der Lehrſatz, daſs in jedem Dreyecke die Summe der Winkel 2 Rechte macht, beynahe allen Sätzen, die ſie von der Geometrie borgt, zum Grunde liegt, und daſs man alſo, wenn man ihn nicht gleich anwendete, ſondern die Auflöſung durch Coordinaten ſuchte, im Kreiſe wieder zu dem Punkte, von dem man ausging, zurückkommt.

4) Die vermiſchte Methode wählt aus den Mitteln, die allen andern zu Gebrauch ſtehen, diejenigen aus, durch die man am leichteſten das vorgeſteckte Ziel erreicht, wodurch ſie freylich der Einförmigkeit ihrer Verfahrungsarten ſchadet. Dagegen zieht ſie aus den ſchon bekannten Eigenſchaften der Figuren, mancherley Mittel, die Unterſuchung zu vereinfachen, und giebt mitunter elegante Auflöſungen. Bis jetzt iſt ſie am meiſten gebraucht, und Newtons, Boſſuts und Hopitals Werke bieten eine Menge von Beyſpielen dar. Auch ich werde ſie hier befolgen, da ſie am meiſten geeignet iſt, in beſondern Fällen die Anwendung der vorher gefundenen Eigenſchaften und der Theorie über die Correlation der Figuren zu zeigen. Mehrere Beyſpiele, die ich geben werde, ſind aus bekannten Werken gezogen, aber auf meine Manier aufgelöſt, andere ſind, wie ich glaube, noch nicht behandelt. Uebrigens iſt meine Abſicht ganz und gar nicht, eine vollſtändige Abhandlung über die Anwendung der Algebra auf die Geometrie zu ſchreiben.

308. Mehrere grofse Geometer haben die vollſtändige Abhandlung des Vierecks und ſelbſt des Vielecks überhaupt geſucht. Da aber die nothwendigen Formeln beynahe unzählbar werden, ſo wie die Zahl der Seiten über 4 geht, ſo habe ich dem hier abzuhelfen geſucht, indem ich Tafeln für alle Theile des Vielecks bilde (ſo wie die im 3ten Abſchnitt für das Dreyeck). Eine ſolche Tafel giebt doch immer durch bloſse algebraiſche Umformungen, alle Formeln, deren man in jedem beſondern Falle bedarf.

Man kann dieſe Methode der Tafeln auf Vielecke, die nicht in einer Ebene liegen, und ſelbſt auf Polyeder erſtrecken. Dieſer Abſchnitt enthält die Andeutung der Auflöſung aller nöthigen Aufgaben, um dieſen Zweck zu erfüllen, wodurch man nach den vorher gegebenen Erklärungen die Mittel erhalte, alle Aufgaben, zu denen die Analyſis ohne Differentialrechnung gelangen kann, auf ſchon aufgelöſte, in Tafelform aufgeſtellte zurückzubringen.

Sechs und zwanzigſte Aufgabe.

309. Ein rechtwinklichtes Dreyeck ABC (Fig. 113.) iſt gegeben, man ſoll zwiſchen den Catheten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, eine Linie FG von gegebner Gröſse ziehen, die von der Hypothenuſe in m in zwey gleiche Theile getheilt wird.

Ich nehme die Linie $\overline{Am}$ als Unbekannte $= x$; die gegebene $\overline{FG}$ ſey $= b$.

Wenn wir aus dem Punkte m mit dem Halbmeſſer $\overline{mF}$ einen Kreis beſchreiben, ſo wird dieſer Kreis auch

auch durch den Punkt G gehen, da nach der Annahme $\overline{mF} = \overline{mG}$, und weil der Winkel $F\hat{A}G = R$ wird er auch durch A gehen, alſo $\overline{Am} = \overline{mF} = \frac{1}{2}b$ oder

$$x = \tfrac{1}{2}b$$

was zu finden war.

Wäre folgende Aufgabe zu behandeln:

Wenn das rechtwinklichte Dreyeck ABC gegeben iſt zwiſchen den verlängerten Catheten eine Linie FG' zu ziehen, von gegebener Gröſse, und die von der verlängerten Hypothenuſe in m' in 2 gleiche Theile getheilt werde;

ſo würde man eben wie vorhin $\overline{Am'} = \frac{1}{2}b$ finden, d. h. der Punkt m' wäre der zweyte Durchſchnittspunkt der Hypothenuſe, mit dem vorher beſchriebenen Kreiſe.

Alſo geben die Punkte m, m', die Auflöſungen dieſer allgemeinen Aufgabe, die die vorigen als partielle Aufgaben umfaſst.

Wenn ein rechtwinklichtes Dreyeck gegeben iſt, zwiſchen den Richtungen der Catheten eine Linie von gegebener Gröſse zu ziehen, die durch die Richtung der Hypothenuſe in 2 gleiche Theile getheilt werde.

Da die allgemeine Aufgabe zwey Auflöſungen hat, ſo muſs ſie natürlich auf eine Gleichung vom 2ten Grade führen. Da wir indeſſen eine Unbekannte annahmen, die in beyden Fällen dieſelbe bleibt, ſo kamen wir nur auf eine Gleichung vom 1ſten Grade.

Man sieht daraus, wie vortheilhaft es sey, Unbekannte zu wählen, die bey allen oder doch den meisten Auflösungen dieselben bleiben. Hätte man z. B. $\overline{Bm}$ genommen, so würde man dieses Vortheils verlustig gegangen seyn. Die Gleichung wäre auf den zweyten Grad gestiegen, und hätte zwey positive Wurzeln $\overline{Bm}$, $\overline{Bm'}$ gehabt.

Hätte man $\overline{AF'}$ genommen, so wäre die Gleichung ebenfalls auf den 2ten Grad gestiegen, eine Wurzel wäre positiv, die andere negativ gewesen, die eine hätte F, und die andere im entgegengesetzten Sinn getragen, F' gegeben. Daraus folgt aber nicht, dafs AF' eine negative Quantität sey, sie gehört nur zu denen, die ich inverse genannt habe.

Diese andere im entgegengesetzten Sinn getragene Wurzel, kann nicht als eine zweyte Auflösung des partiellen in Gleichung gesetzten Problems betrachtet werden, sie ist vielmehr die Auflösung des andern partiellen Problems, das nicht in Gleichung gesetzt ist, sie zeigt blos dies letzte, dem ersteren analoge, Problem an. So ist es überhaupt. Nie entspricht eine negative Wurzel der Aufgabe, die in Gleichung gesetzt ist, sie zeigt ebenso wie die imaginairen Wurzeln analoge Untersuchungen oder partielle Probleme an, die man durch sie auflösen kann.

Nur zufälligerweise mufste man in der vorigen Aufgabe F, F' in entgegengesetztem Sinne vom Punkt A nehmen. Bey vielen andern Aufgaben mufs man die entgegengesetzten Wurzeln schief, ja selbst in demselben Sinne, wie die positiven nehmen, so dafs es,

wie wir vorher gezeigt haben, durchaus keine feſte Regel in dieſer Hinſicht giebt.

Sieben und zwanzigſte Aufgabe.

310. Zwey grade Linien $\overline{B'B'''}$, $\overline{CC''}$ (Fig. 114.) ſchneiden ſich unter einem gegebenen Winkel $B\hat{K}C$, aus einem Punkte H in der Ebene dieſes Winkels, der auf der Linie $\overline{KH}$ liegt, die eben den Winkel in 2 gleiche Theile theilt, eine Linie $\overline{BC}$ von gegebener Gröſse zu ziehen, die durch $\overline{B'B'''}$, $\overline{CC''}$ begränzt werde.

Ich nehme den Winkel $K\hat{H}B$ als Unbekannte, es ſey alſo

$$K\hat{H}B = x$$
$$\overline{BC} = a$$
$$\overline{KH} = b$$
$$B\hat{K}H = \tfrac{1}{2}\, B\hat{K}C = m$$

Das Dreyeck BKH giebt

$$BH : b = \sin m : \sin (m + x)$$

alſo

$$\overline{BH} = \frac{b \cdot \sin m}{\sin (x - m)}$$

Ebenſo giebt das Dreyeck CKH

$$\overline{CH} = \frac{b \cdot \sin m}{\sin (x - m)}$$

addirt man, ſo kommt

$$a = \frac{b \sin m}{\sin (x + m)} - \frac{b \sin m}{\sin (x - m)}$$

oder

$$a \cdot \mathit{fin}\,(x+m)\,\mathit{fin}\,(x-m) = b\,\mathit{fin}\,m\,\{\mathit{fin}(x+m) + \mathit{fin}\,(x-m)\}$$

Weil nun

$$\mathit{fin}\,(x+m) + \mathit{fin}\,(x-m) = 2\,\mathit{fin}\,x\,\mathit{cof}\,m$$

$$\mathit{fin}\,(x+m)\,\mathit{fin}\,(x-m) = \mathit{fin}\,x^2 - \mathit{fin}\,m^2$$

so wird die vorige Gleichung

$$a\,\mathit{fin}\,x^2 - a\,\mathit{fin}\,m^2 = 2b\,\mathit{fin}\,m \cdot \mathit{cof}\,m \cdot \mathit{fin}\,x$$

oder weil

$$2\,\mathit{fin}\,m \cdot \mathit{cof}\,m = \mathit{fin}\,2\,m$$

$$\mathit{fin}\,x^2 - \frac{b}{a}\,\mathit{fin}\,2\,m \cdot \mathit{fin}\,x = \mathit{fin}\,m^2$$

also

$$\mathit{fin}\,x = \frac{b}{2a}\,\mathit{fin}\,2\,m \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(4\,aa\,\mathit{fin}\,m^2 + bb\,\mathit{fin}\,2m^2)}$$

Setzt man den Winkel BKC = einem rechten, so ist $\mathit{fin}\,2\,m = 1$, $\mathit{fin}\,m^2 = \frac{1}{2}$ also

$$\mathit{fin}\,x = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(2\,aa + bb)}$$

Obgleich die Gleichung nur vom zweyten Grade ist, kann man doch die 4 Auflösungen, deren die Aufgabe fähig ist, daraus ziehen, denn da die Figur an beyden Seiten der Linie $\overline{KH}$ symmetrisch ist, so sind die beyden Auflösungen, die sie für eine Seite giebt, auch auf der andern anwendbar, so dass die 4 möglichen Stellungen der Linie BC folgende sind

$$\overline{BC},\ \overline{B'C},\ \overline{B''C''},\ \overline{B'''C'''}$$

Die gefundene Gleichung giebt auch direct diese 4 Auflösungen, da der Sinus eines Winkels, und der des Supplements dieses Winkels derselbe ist.

Acht und zwanzigſte Aufgabe.

311. Ein Kreis BDC und zwey Tangenten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ſind gegeben, zwiſchen dieſen Tangenten eine dritte Tangente zu ziehen, die einer gegebenen Linie gleich ſey (Fig. 115.)

Wir wollen als Unbekannte die Segmente $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ der geſuchten Tangente nehmen, und vorausſetzen, es ſey

$\overline{DE}$ oder $\overline{BE} = x$
$\overline{DF}$ oder $\overline{CF} = y$
die gegebene Linie $\overline{EF} = a$
die bekannte Linie $\overline{AB}$ oder $\overline{AC} = b$
der bekannte Winkel $B\hat{A}C = h$

Wir haben alſo aus den Bedingungen der Aufgabe

$$x + y = a$$

Ferner

$$\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 - 2\,\overline{AE} \cdot \overline{AF} \cdot cof\, B\hat{A}C$$

oder weil

$\overline{BE} = \overline{DE}$,
$\overline{CF} = \overline{DF}$,

$$aa = (b + x)^2 + (b + y)^2 - 2(b + x)(b + y)\, cof\, h$$

weil nun

$x + y = a$

$$aa = 2(bb + ab)(1 - cof\, h) + xx + yy - 2xy\, cof\, h$$

Subſtituirt man in dieſer Gleichung für y ſeinen Werth $a - x$, ſo hat man

$$(xx - ax)\,(1 + cof\,k) + (bb + ab)\,(1 - cof\,k) = o$$

oder

$$xx - ax + (bb + ab)\,\frac{1 - cof\,k}{1 + cof\,k} = o$$

alſo

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm r\left\{\tfrac{1}{4}aa - (bb + ab)\,\frac{1 - cof\,k}{1 + cof\,k}\right\}$$

Dieſe Gleichung hat 2 poſitive Wurzeln, die die beyden Tangenten $\overline{EF}$, $\overline{E'F}$, die ſymmetriſch liegen, geben. Indeſſen hat die Aufgabe 4 Auflöſungen, denn bey Anſetzung der Gleichung ſetzten wir voraus, der Punkt F fiele auf die Verlängerung von $\overline{AC}$, es iſt aber gar kein Grund vorhanden, warum er eher dahin als auf die andere Seite nach F'' fallen ſoll. In der That, wenn man von dieſer Vorausſetzung ausgeht, ſo erhält man

$$xx + ax + (bb - ab)\,\frac{1 - cof\,k}{1 - cof\,k} = o$$

alſo

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm r\left\{\tfrac{1}{4}aa - (bb - ab)\,\frac{1 - cof\,k}{1 + cof\,k}\right\}$$

eine Gleichung, die die beyden neuen ſymmetriſchen Auflöſungen $\overline{E''F''}$, $\overline{E'''F'''}$ giebt, die erſte, wenn man die poſitive Wurzel von B nach E'', die zweyte, wenn man die negative Wurzel von B nach E''' trägt.

Neun und zwanzigſte Aufgabe.

312. Wenn zwey beliebige Durchmeſſer in einem gegebnem Kreiſe gezogen, und unbeſtimmt verlängert ſind, an dieſen Kreis eine Tangente $\overline{EF}$ zu ziehen, ſo daſs

die Theile $\overline{DE}$, $\overline{DF}$, dieſer Tangente, die zwiſchen dem Berührungspunkt D und jedem der Durchmeſſer $\overline{EE''}$, $\overline{FF''}$ liegen, in gegebnem Verhältniſſe ſeyen.

Es ſey A der Mittelpunkt des Kreiſes und der Halbmeſſer AD an den Berührungspunkt gezogen. Als Unbekannte nehme ich die Winkel $E\hat{A}D$, $F\hat{A}D$. Nun ſeyen

$$E\hat{A}D = u$$
$$F\hat{A}D = z$$
$$E\hat{A}F = h$$

das Verhältniſs der Segmente $\overline{ED}$, $\overline{DF} = a$

Nun ſind aber die Segmente den Tangenten der Winkel $E\hat{A}D$, $F\hat{A}D$ proportional, alſo

$$\frac{tg\ u}{tg\ z} = a \quad \text{oder} \quad tgu = atgz$$

Ferner hat man offenbar $h = u + z$ Alſo

$$tgh = \frac{tg\ u + tgz}{1 - tg\ u \,.\, tgz}$$

oder

$$tgh - tgh\ tgu.tgz = tgu + tgz$$

d. h.

$$tgh - a\,tgh.tgz^2 = (a+1)\,tgz \quad \text{oder}$$

$$tgz^2 + tgz\,\frac{a+1}{atgh} - \frac{1}{a} = 0$$

oder

$$tgz = -\frac{a+1}{2\,a\,tg\ h} \pm r\left\{\left(\frac{a+1}{2\,a\,tg\ h}\right)^2 + \frac{1}{a}\right\}$$

Nach der Theorie der goniometriſchen Funktionen giebt die poſitive Wurzel den Punkt D, der im Winkel $E\hat{A}F$, der Hypotheſe gemäſs begriffen iſt, und

die negative Wurzel den Punct D' im Supplement-Winkel $F'\hat{A}E'$ genommen.

Aber man sieht leicht, dass, wenn man den Durchmesser $\overline{DD''}$ zieht, und durch den Punct D'' die Tangente $\overline{E''F''}$, diese Tangente eben so wohl als $\overline{EF}$, der sie parallel und gleich ist, die Bedingungen der Aufgabe erfüllen wird. Eben so wenn man durch D' den Durchmesser $\overline{D'D'''}$, und durch D''' die Tangente $\overline{E'''F'''}$ zieht, wird auch diese Tangente eben so gut als $\overline{EF}$ den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten.

Alle diese 4 Auflösungen sind in der gefundenen Gleichung enthalten, weil $tg\, z$ sowohl zu dem Bogen z, als zu dem Bogen $2\pi + z$ gehört (wo π den rechten Winkel bedeutet). So giebt die positive Wurzel der Puncte D, D'', die negative D', D'''.

Aber die Aufgabe hat noch 4 andere Auflösungen, die nicht in der Gleichung enthalten sind. Man nehme auf dem Umkreise im Winkel $B\hat{A}C'$ (Fig. 117.) einen Punkt d, so dass, wenn man durch diesen Punkt eine Tangente zieht, die die gegebnen Durchmesser in e, und f schneidet, $\overline{de}$ und df in gegebenem Verhältnisse stehen. Nach den Worten der Aufgabe leistet der Punkt d ihr Genüge, und es muss noch ein ähnlicher Punkt am Ende des Durchmessers seyn, der durch d gezogen ist. Diese Auflösungen nun sind nicht in der vorigen Gleichung enthalten; um sie zu erhalten, muss man die Rechnung auf der neuen Voraussetzung anfangen, nicht dass $k = u + z$, sondern dass $k = z - u$. So erhält man

$$tg\,z = \frac{1-a}{2\,a\,tg\,k} \pm r\left\{\left(\frac{1-a}{2\,a\,tg.k}\right)^2 - \frac{1}{a}\right\}$$

Man kann alle dieſe Auflöſungen in einer einzigen Formel vereinen, nämlich

$$tg\,z = -\frac{a \pm 1}{2\,a\,tg.k} \pm r\left\{\left(\frac{a \pm 1}{2\,a\,tg.k}\right)^2 \pm \frac{1}{a}\right\}$$

Dreyſsigſte Aufgabe.

313. Zwey Kreiſe *MBm*, *NCn*, (Fig. 118.) ſind in derſelben Ebene beſchrieben, man ſoll aus einem Punkte *H*, der willkührlich auf der Linie angenommen iſt, die durch die Mittelpunkte geht, eine grade Linie $\overline{BC}$, zwiſchen den beyden Kreiſen ziehn, die in H nach gegebenem Verhältniſſe getheilt ſey.

Als Unbekannte wollen wir die Linie $\overline{CH}$ annehmen. Wir nennen ferner

$$CH = x$$

das gegebene Verhältniſs

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = a$$

$$\overline{MB} = R$$

$$\overline{NC} = r$$

$$\overline{MH} = m$$

$$NH = n$$

Da die beyden Dreyecke *MBH*, *NCH* einen gleichen Winkel in *H* haben, müſſen wir nach (206.) erhalten

$$(\overline{MH}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{MB}^2) \cdot \overline{CH} \cdot \overline{NH} = (\overline{NH}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{NC}^2)\,\overline{BH} \cdot \overline{MH}$$ oder

$$(mm + aaxx - RR)\, nx = (nn + xx - rr)\, amx$$

woraus man

$$x = r\,\frac{amnn - mmn + nRR - amrr}{naa - am}$$

erhält.

Ich laſſe das doppelte Zeichen vor der Wurzel weg, weil die negative Wurzel hier unbedeutend iſt, wenn man ſie nicht als die Anzeige einer andern Auflöſung anſehen will, zu der man gelangt, wenn man auf der andern Seite der Linie $\overline{MN}$, auf dem Kreiſe, deſſen Mittelpunkt in N iſt, einen Punkt C', in derſelben Entfernung als C nimmt, weil die Figur ſymmetriſch iſt.

Ein und dreyſsigſte Aufgabe.

314. Durch zwey willkührlich auf dem Umkreis eines Cirkels angenommene Punkte zwey Sehnen zu ziehen, die ſich unter einem gegebenen Winkel ſchneiden, und zu einander in gegebenem Verhältniſs ſtehen.

Es ſey $ABDC$ (Fig. 54.) der Kreis A, und B die beyden Punkte, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ die Sehnen, $A\hat{E}C$ der Winkel, den ſie bilden ſollen.

Ich ziehe die Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, und nehme als Unbekannte die beyden Winkel $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$.

Ferner ſey

$$B\hat{A}D = m$$
$$C\hat{A}D = n$$
$$A\hat{E}C = k$$
$$\overline{AB} = a$$
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = b$$

der Radius des Kreiſes $= R$.

Aus der Aufgabe XXI. (178.) haben wir (Formel 27)

$$a = 2\,R\,\mathit{ſin}\,(k + n) \ldots\ldots \text{(A)}$$

und wenn wir die 28ſte durch die 25ſte Formel dividiren

$$b = \frac{\mathit{ſin}\,(k + n - m)}{\mathit{ſin}\,(m + n)}$$

oder

$$b\,.\,\mathit{ſin}\,(m + n) = \mathit{ſin}\,(k + n - m) \ldots\ldots \text{(B)}$$

Man ſoll m, und n aus dieſen beyden Gleichungen beſtimmen.

Entwickele ich die erſte, ſo kommt

$$a = 2\,R\,.\,\mathit{ſin}\,k\,\mathit{coſ}\,n + 2\,R\,\mathit{ſin}\,n\,.\,\mathit{coſ}\,k$$

oder

$$a - 2\,R\,\mathit{ſin}\,k\,\mathit{coſ}\,n = 2\,R\,\mathit{ſin}\,n\,.\,\mathit{coſ}\,k\,.$$

quadrirt giebt

$$aa - 4\,a\,R\,\mathit{ſin}\,k\,\mathit{coſ}\,n + 4\,RR\,\mathit{ſin}\,k^2\,\mathit{coſ}\,n^2 = 4RR\,\mathit{coſ}\,k^2 - 4\,RR\,\mathit{coſ}\,k^2\,.\,\mathit{coſ}\,.\,n^2$$

oder

$$4\,RR\,\mathit{coſ}\,n^2 - 4\,a\,R\,\mathit{ſin}\,k\,\mathit{coſ}\,n + aa - 4\,RR\,\mathit{coſ}\,k^2 = o$$

woraus man

$$cof\, n = \frac{a\, fin\, k}{2R} \pm \frac{cof\, k}{2R} \sqrt{(4RR - aa)}$$

und folglich

$$fin\, n = \frac{a\, cof\, k}{2R} \pm \frac{fin\, k}{2R} \sqrt{(4RR - aa)}$$

zieht. Um m zu finden, entwickele ich die Gleichung (B); sie giebt mir

$$b\, fin\, m . cof\, n + b\, fin\, n . cof\, m = fin\,(k+n)\, cof\, m - fin\, m . cof\,(k+n)$$

oder

$$fin\, m \{b\, cof\, n + cof\,(k+n)\} = cof\, m \{fin\,(k+n) - b\, fin\, n\}$$

also

$$tg\, m = \frac{fin\,(k+n) - b\, fin\, n}{b . cof\, n + cof\,(k+n)}$$

Die Gleichung (A) giebt $fin\,(k+n) = \frac{a}{2R}$

folglich

$$cof\,(k+n) = \frac{1}{2R} \sqrt{(4RR - aa)}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe, ſo erhalten wir

$$tg\, m = \frac{a - 2\, b\, R\, fin\, n}{2bR\, cof\, n + \sqrt{(4RR - aa)}}$$

oder wenn wir auch die für $fin\, n$, und $cof\, n$ gefundenen Werthe ſubſtituiren

$$tg\, m = \frac{a - ab\, cof . k \mp b\, fin\, k \sqrt{(4RR - aa)}}{ab\, fin\, k \pm b\, cof\, k \sqrt{(4RR - aa)} + \sqrt{(4RR - aa)}}$$

$$= \frac{a - b\,(a\, cof\, k \pm fin\, k \sqrt{(4RR - aa)})}{\sqrt{(4RR - aa)} + b(a . fin\, k \pm cof\, k \sqrt{(4RR - aa)})}$$

Zwey und dreyſsigſte Aufgabe.

315. Durch einen beliebigen in der Ebene eines gegebenen Kreiſes liegenden Punkt E, zwey auf einander ſenkrechte Sehnen zu ziehen, die zu einander in gegebenem Verhältniſs ſtehen.

L (Fig. 119.) ſey der Mittelpunkt des Kreiſes. Wir wollen die Linie LE zu dem gegebenen Punkt ziehen. Ich nehme die beyden geſuchten Corden $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ als Unbekannte an, und nenne

$$\overline{AD} = x$$
$$BC = y$$
$$\frac{x}{y} = a$$

den Halbmeſſer $= r$

$$\overline{LE} = b$$

Wir haben alſo die beyden Gleichungen

$$x = ay$$
$$xx + yy = 8rr - 4bb$$

Durch Subſtitution wird aus der zweyten

$$yy\,(1 + aa) = 8rr - 4bb$$

alſo

$$y = r\,\frac{8rr - 4bb}{1 + aa}$$

und folglich

$$x = a\,r\,\frac{8rr - 4bb}{1 + aa}$$

Ich laſſe das Zeichen — vor dem Wurzelzeichen weg, weil es ganz ohne Bedeutung hier iſt. Doch ſieht man leicht, daſs die Aufgabe in der That zwey Auflöſungen hat (Fig. 120.), von denen die eine durch

$\overline{AD}$, $\overline{BC}$, die andere durch $\overline{A'D'}$, $\overline{B'C'}$ vorgeſtellt wird. Auch dieſs iſt alſo ein Beleg zu unſerer Behauptung, daſs die Analyſis bald überflüſſige und unnütze Wurzeln (bloſse algebraiſche Formen) giebt, bald nur einige von allen, die der Aufgabe Genüge leiſten können.

Wenn die Sehne $\overline{AD}$ bekannt iſt, ſo kommt die Aufgabe darauf zurück, durch den gegebenen Punkt E im Kreiſe, die gegebene Sehne $\overline{AC}$ zu ziehen, welches leicht iſt, denn wenn man willkührlich im Kreiſe eine Sehne $\overline{ad} = \overline{AD}$ nimmt, und aus L mit $\overline{LE}$ einen Bogen beſchreibt, der $\overline{ad}$ in e ſchneidet, ſo hat man $\overline{ed} = \overline{ED}$, und kann dieſe Linie an den Punkt E tragen.

Eben ſo würde man den Fall auflöſen, wenn E auſserhalb des Kreiſes wäre, aber man ſieht leicht, daſs dann die Aufgabe unmöglich wird, wenn

$$4bb > 8rr$$

oder

$$b > r\sqrt{2}$$

Durch dieſelbe Eigenſchaft der Sehnen fände man die Auflöſung, wenn man ſtatt des Verhältniſſes der Sehnen, ihre Summe, Differenz u. ſ. w. kennte.

Drey und dreyſsigſte Aufgabe.

316. Aus einem beliebigen Punkte innerhalb oder auſserhalb einer Kugel, drey auf einander ſenkrechte Sehnen zu ziehen, die in gegebenem Verhältniſſe ſind.

Wir wollen als Unbekannte die drey geſuchten Sehnen annehmen.

Es ſey ferner

die eine $= x$
die andere $= y$
die dritte $= z$
der Halbmeſſer der Kugel $= r$

Die Entfernung des Mittelpunkts von dem Punkte, wo ſie ſich ſchneiden ſollen

$$= b$$

$$\frac{x}{z} = a$$

$$\frac{y}{z} = b$$

Wir haben alſo die 3 Gleichungen

$$x = az$$

$$y = cz$$

$$xx + yy + zz = 12rr - 8bb$$

Subſtituirt man aus den beyden vorigen in die letzte, ſo wird

$$zz(1 + aa + cc) = 12rr - 8bb$$

alſo

$$z = r\sqrt{\frac{12rr - 8bb}{1 + aa + cc}}$$

$$y = cr\sqrt{\frac{12rr - 8bb}{1 + aa + cc}}$$

$$x = ar\sqrt{\frac{12rr - 8bb}{1 + aa + cc}}$$

Ich habe das doppelte Wurzelzeichen weggelaſſen, weil die negativen Wurzeln hier ohne Bedeutung ſind. Man ſieht leicht, daſs die Aufgabe unendlich viel Auflöſungen hat. Stellt man ſich durch den Punkt, wo die 3 Sehnen ſich ſchneiden, einen Durchmeſſer vor,

so werden offenbar alle Sehnen, die durch diesen Punkt gehen, und denselben Winkel als x mit dem Durchmesser machen, gleich seyn, und also für x genommen werden können. Man kann die Aufgabe bestimmt machen, wenn man die Bedingung hinzusetzt, dass x sich in einem bestimmten grösten Kreise befinden soll, der durch den gegebenen Punkt geht. Dann hat die Aufgabe 6 Auflösungen, weil man offenbar x, y, z, auf alle mögliche Weise, eine für die andere setzen kann, was 6 verschiedene Combinationen giebt.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn

$$b > r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Vier und dreyssigste Aufgabe.

317. Durch einen beliebigen Punkt, innerhalb oder aufserhalb einer Kugel, drey, auf einander senkrechte Ebenen zu führen, so dafs die Flächen der 3 Kreise, die aus den Durchschnitten dieser Ebenen mit der Kugel entstehen, in gegebenem Verhältnisse stehen.

Wir wollen als Unbekannte die Halbmesser der 3 gesuchten Kreise annehmen, so werden sich die Flächen dieser Kreise, wie die Quadrate der Halbmesser verhalten. Es sey

der eine Halbmesser $= x$
der andere $= y$
der dritte $= z$

$$\frac{xx}{zz}$$

$$\frac{xx}{zz} = a$$

$$\frac{yy}{zz} = c$$

der Halbmeſſer der Kugel $= r$
die Entfernung des Punktes, wo ſich die 3 Ebenen ſchneiden, vom Mittelpunkte $= b$

Wir haben alſo folgende Gleichungen

$$xx = azz$$
$$yy = czz$$
$$xx + yy + zz = 3rr - bb$$

Daraus wird durch Subſtitution

$$zz\,(1 + a + c) = 3rr - bb$$

alſo

$$z = r\,\frac{3rr - bb}{1 + a + c}$$

$$y = r\,c\,\frac{3rr - bb}{1 + a + c}$$

$$x = r\,a\,\frac{3rr - bb}{1 + a + c}$$

Man kann dieſelben Bemerkungen über die Wurzeln hier machen, wie bey der vorigen Aufgabe.

Fünf und dreyſsigſte Aufgabe.

318. Wenn man die Winkel eines Dreyecks ABC (Fig. 121.) kennt, und die Entfernungen jeder Seite von einem Punkte D, der in derſelben Ebene liegt, die 3 Seiten des Dreyecks zu finden.

Wir wollen mit A, B, C, die drey gegebenen Winkel des Dreyecks bezeichnen, mit a, b, c, die ge-

genüberſtehenden Seiten, mit a', b', c', die Perpendikel aus D auf dieſe Seiten.

Aus D ziehe ich nach den Winkeln A, B, C grade Linien, dann iſt offenbar die Fläche des Dreyecks ABC, gleich den Flächen der beyden Dreyecke ABD, ACD weniger der Fläche des Dreyecks BCD d. h.

$$\overline{\overline{ABC}} = \overline{\overline{ABD}} + \overline{\overline{ACD}} - \overline{\overline{BCD}}$$

Aber

$$\overline{\overline{ABC}} = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \tfrac{1}{2}bc \cdot \sin A$$
$$\overline{\overline{ABD}} = \tfrac{1}{2}cc'$$
$$\overline{\overline{ACD}} = \tfrac{1}{2}bb'$$
$$\overline{\overline{BCD}} = \tfrac{1}{2}aa'$$

wir haben alſo

$$bc \cdot \sin A = bb' + cc' - aa'$$

Nun iſt ferner

$$b = a \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$c = a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$$

Subſtituirt und dividirt man durch $\sin B \cdot \sin C$, ſo kommt

$$a = \frac{b' \cdot \sin B + c' \cdot \sin C - a' \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$b = \frac{b' \cdot \sin B + c' \cdot \sin C - a' \cdot \sin A}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$c = \frac{b' \cdot \sin B + c' \cdot \sin C - a' \cdot \sin A}{\sin A \cdot \sin B}$$

Läge der Punkt D im Dreyecke, ſo würde a invers und veränderte ſein Zeichen.

Man kann auch leicht ohne Rechnung durch Conſtruction einer ähnlichen Figur (193.) die Aufgabe löſen.

Uebrigens ſieht man leicht, daſs man die Auflöſung auf jedes Vieleck erſtrecken kann.

Sechs und dreyſsigſte Aufgabe.

319. Wenn man die Perpendikel aus den Winkeln des Dreyecks auf die gegenüberſtehende Seite kennt, Seiten und Winkel des Dreyecks zu finden.

Es ſey ABC (Fig. 122.) das gegebene Dreyeck, a', b', c' ſollen die aus den Winkeln A, B, C, auf die Seiten a, b, c, geſenkten Perpendikel ſeyn.

Aus den Eigenſchaften der Dreyecke haben wir

$$cof\ A = \frac{bb + cc - aa}{2bc}$$

Man weiſs auch, daſs die Perpendikel aus den Winkeln auf die Seiten geſenkt in inverſem Verhältniſs der Seiten ſtehen,

alſo

$$b = \frac{aa'}{b'}$$

$$c = \frac{aa'}{c'}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die vorige Gleichung, ſo wird ſie

$$cof\ A = \frac{(a'b')^2 + (a'c')^2 - (b'c')^2}{2a'a'b'c'}$$

oder

$$cof\,A = \frac{b'}{2c'} + \frac{c'}{2b'} - \frac{b'c'}{2a'a'}$$

und eben ſo

$$cof\,B = \frac{a'}{2c'} + \frac{c'}{2a'} - \frac{a'c'}{2b'b'}$$

$$cof\,C = \frac{a'}{2b'} + \frac{b'}{2a'} - \frac{a'b'}{2c'c'}$$

ſo haben wir die 3 Winkel und brauchen nur die Seiten zu ſuchen.

Das rechtwinklichte Dreyeck ABH giebt $\overline{AH} : \overline{AB} = fin\,B : 1$

alſo

$$c = \frac{a'}{\sqrt{1 - cof\,B^2}}$$

eben ſo

$$a = \frac{b'}{\sqrt{1 - cof\,C^2}}$$

$$b = \frac{c'}{\sqrt{1 - cof\,A^2}}$$

Sieben und dreyſsigſte Aufgabe.

320. Ein Dreyeck FGH (Fig. 123.) iſt gegeben, darum ein anderes Dreyeck ABC zu beſchreiben, ſo daſs, wenn man aus jedem Winkel des letztern, ein Perpendikel auf die gegenüberſtehende Seite ſenkt, dieſe Perpendikel genau in die Punkte $F, G, H,$ fallen, welche die Scheitelpunkte des erſten ſind.

Es seyen $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ die Perpendikel aus den Winkeln A, B, C auf die gegenüberstehenden Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$.

Die Tafel Aufgabe XVI (167.) giebt uns

$$\hat{FHG} = 2\pi - 2A \text{ oder}$$
$$A = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{FHG} \text{ (Form. 28.)}$$

und eben so (Form. 29, 30.)

$$B = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{FGH}$$
$$C = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{GFH}$$

die 3 Winkel des Dreyecks ABC sind also bekannt.

Um zu construiren, bemerke man, dass dieselbe Tafel (Form. 16, 17, 18.)

$$\hat{BHF} = A$$
$$\hat{BFH} = C$$
$$\hat{CGH} = B$$

giebt. Man braucht also nur durch den Scheitel H eine Linie $\overline{BC}$ zu ziehen, die mit der gegebenen Linie $\overline{FH}$ den Winkel $\hat{BHF} = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{FHG}$ macht, durch den Scheitel F eine andere Linie $\overline{AB}$, die mit $\overline{FH}$, den Winkel $\hat{BFH} = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{GFH}$ macht, und endlich durch G eine Linie $\overline{AC}$, die mit $\overline{GH}$, den Winkel $\hat{CGH} = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{FGH}$ macht. Diese 3 Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, sind die 3 Seiten des gesuchten Dreyecks.

Acht und dreyssigste Aufgabe.

321. Eine Sehne $\overline{BC}$ (Fig. 124.) ist beliebig in einem Kreise gezogen. Auf dem Umfange dieses Kreises einen Punkt A zu finden, so dass, wenn man die Sehnen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, die Perpendikel auf diese Sehnen

$\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, und die Linie $\overline{FG}$ zieht, der Winkel $A\hat{C}E$, den dieſe Linie mit dem Perpendikel $\overline{AH}$ macht, einem gegebenen Winkel gleich ſey.

Die 16te Aufgabe (167.) zeigt (Form. 31.), daſs der gegebene Winkel $A\hat{I}F = \pi - (C - B)$. Der Winkel A iſt bekannt, weil er auf einer gegebenen Sehne ſteht. Bekanntlich iſt auch

$$2\pi = A + B + C$$

addirt man die beyden Gleichungen, ſo kommt

$$2\pi + A\hat{I}F = \pi + A + 2B$$

alſo

$$B = \frac{\pi + A\hat{I}F - A}{2}$$

und

$$C = \frac{3\pi - A\hat{I}F - A}{2}$$

Dieſe Aufgabe, und die vorige, zeigen, daſs man oft vortheilhaft unmittelbar die Winkel beſtimmt, ſtatt goniometriſche Functionen zu gebrauchen, durch die dieſe Aufgaben leicht auf eine ſehr verwickelte Analyſe führen könnten.

Vierzigſte Aufgabe.

322. In einem gegebenen Viereck ein Quadrat zu beſchreiben.

Es ſey $ABCD$ (Fig. 125.) das Viereck, $mnpq$ das geſuchte Quadrat. Da ich das Viereck kenne, kenne ich auch ſeine Winkel. Wäre nun noch ein einziger von denen bekannt, die durch die gegenſeitige Lage des Vielecks und des Quadrats beſtimmt werden,

z. B. $B\hat{m}n$, so würden alle andern durch simple Additionen und Subtractionen erhalten. Hätte man die Winkel, so brauchte man nur den absoluten Werth der Seite des Quadrats zu suchen, wozu das Verhältniss der Seiten eines Dreyecks mit dem Sinus der gegenüberstehenden Winkel leicht führt. Ich nehme also als Unbekannte die Seite $\overline{mn}$ und den Winkel $B\hat{m}n$, und nenne

$$\overline{mn} = y$$
$$B\hat{m}n = z$$

Die 4 Winkel des Vierecks $= A, B, C, D$

$$\overline{AB} = m$$
$$\overline{BC} = n$$
$$\overline{CD} = p$$
$$\overline{DA} = q$$

den rechten Winkel $= \pi$

So erhalte ich

$$A\hat{m}q = \pi - z$$
$$A\hat{q}m = \pi - A + z$$
$$D\hat{q}p = A - z$$
$$D\hat{p}q = 2\pi - D - A + z$$
$$m\hat{n}B = 2\pi - B - z$$
$$p\hat{n}C = B + z - \pi$$
$$n\hat{p}C = 3\pi - B - C - z$$

Jetzt ist es leicht, die Linien der Figur zu berechnen.

Das Dreyeck Bmn giebt

$$\overline{Bn} : \overline{mn} = \sin Bmn : \sin mBn$$

oder

$$\overline{Bn} = \frac{y \cdot \sin z}{\sin B}$$

und

$$\overline{Bm} = \frac{\gamma \cdot \sin(B+z)}{\sin B}$$

Eben so giebt das Dreyeck Amq

$$\overline{Am} = \frac{\gamma \cos(A-z)}{\sin A}$$

das Dreyeck npC

$$\overline{nC} = -\frac{\gamma \cos(B+C+z)}{\sin C}$$

Substituirt man diese Werthe in folgende evidente Gleichungen

$$\overline{AB} \text{ oder } m = \overline{Am} + \overline{Bm}$$
$$\overline{BC} \text{ oder } n = \overline{Bn} + \overline{Cn}$$

so hat man

$$m = \frac{\gamma \cos(A-z)}{\sin A} + \frac{\gamma \cdot \sin(B+z)}{\sin B} \ldots\ldots (A)$$

$$n = \frac{\gamma \sin z}{\sin B} - \frac{\gamma(B+C+z)}{\sin C} \ldots\ldots (B)$$

also

$$m \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot \sin z - m \sin A \cdot \sin B \cdot \cos(B+C+z)$$
$$= n \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos(A-z) + n \sin A \cdot \sin C \cdot \sin(B+z)$$

Entwickelt man die Quantitäten $\cos(B+C+z)$, $\cos(A-z)$ $\sin(B+z)$, so hat man, nachdem man durch $\cos z$ dividirt hat,

$$tgz = \frac{n \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C + n \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos A + m \cdot \sin A \cdot \sin C + m \sin A \cdot \sin B \cdot \sin(B+C) - n \sin A \cdot \sin B \cdot \cos(B+C)}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C - n \sin A \cdot \sin C \cdot \cos B}$$

323. Diese Gleichung vom ersten Grade zeigt nur eine Auflösung an. Freylich gehören zu tgz zwey

Bogen, da aber ihr Unterſchied $= 2\pi$ iſt, ſo iſt die zweyte Auflöſung mit der erſten identiſch.

Die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit genommen hat 3 Auflöſungen, da der Punkt m auch auf der verlängerten Linie jenſeits A, oder B ſeyn könnte. Sie würde alſo auch auf eine Gleichung vom 3ten Grade führen, wenn nicht durch unſere Wahl der Unbekannten die 3 Wurzeln rational würden.

Ein und vierzigſte Aufgabe.

324. In einem gegebenem Dreyecke, ein anderes gegebenes Dreyeck zu beſchreiben.

Es ſey ABC (Fig. 126.) das Dreyeck, in dem das Dreyeck abc beſchrieben werden ſoll, ſo daſs die Winkel a, b, c ſich auf den Seiten von ABC ſelbſt, oder auf deren Verlängerungen befinden.

Als Unbekannte nehme ich den Winkel $A\hat{b}c = z$, weil durch ihn alle anderen gegeben ſind.

Es ſollen nun heiſsen

die 3 Winkel des Dreyecks AEC . . . . A, B, C
die gegenüberſtehenden Seiten . . . . . A', B', C'
die 3 Winkel des Dreyecks abc . . . . a, b, c
die gegenüberſtehenden Seiten . . . . . a', b', c'

ſo iſt

$$A\hat{c}b = 2\pi - A - z$$
$$C\hat{b}a = 2\pi - b - z$$
$$B\hat{c}a = 2\pi - c - A\hat{c}b = A - c + z$$
$$B\hat{a}c = 2\pi - A - B + c - z$$
$$C\hat{a}b = b - C + z$$

Jetzt kann man alle Segmente $\overline{Ab}$, $\overline{Ac}$, $\overline{Ba}$, $\overline{Bc}$, $\overline{Ca}$, $\overline{Cb}$ leicht finden. Es ist nämlich

$$\overline{Ac} = \frac{a \cdot \sin z}{\sin A}$$

$$\overline{cB} = \frac{b \cdot \sin(A+B-c+z)}{\sin B}$$

also

$$C = \frac{a \cdot \sin z}{\sin A} + \frac{b \cdot \sin(A+B-c+z)}{\sin B}.$$

oder wenn man mit $\sin A \cdot \sin B$ multiplicirt

$$C \cdot \sin A \cdot \sin B = a \cdot \sin B \cdot \sin z + b \cdot \sin A \cdot \sin (A+B-c+z) \ldots\ldots \text{(A)}$$

Durch Entwickelung von $\sin(A+B-c+z)$ erhalte ich

$$C \cdot \sin A \cdot \sin B - \{a \sin B + b \cdot \sin A \cos(A+B-c)\} \sin z = b \cdot \sin A \cdot \sin(A+B-c) \sqrt{1-\sin z^2}$$

also

$$\sin z^2 - \sin z \cdot \frac{2C \sin A \cdot \sin B \{a \sin B + b \cdot \sin A \cdot \sin(A+B-c)\}}{\{a \cdot \sin B + b \sin A \cdot \cos(A+B-c)\}^2 + bb \cdot \sin(A+B-c)^2} = \frac{bb \cdot \sin(A+B-c)^2 - CC \cdot \sin A^2 \cdot \sin B^2}{\{a \sin B + b \sin A \cdot \cos(A+B-c)\}^2 + bb \sin(A+B-c)^2}$$

eine Gleichung vom 2ten Grade, die doch 4 Auflösungen giebt, da zu jedem Werth von $\sin z$ zwey verschiedene Winkel gehören.

Zwey und vierzigſte Aufgabe.

325. Auf einer gegebenen Linie $\overline{MN}$ (Fig. 127.) einen Punkt A zu finden, deſſen Entfernungen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, von zwey gegebenen Punkten B, C in gegebenem Verhältniſſe ſtehen.

Es ſey $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = a$, durch B und C ziehe ich die unbeſtimmte Linie $\overline{BCH'}$. Ich theile den Zwiſchenraum $\overline{BC}$ in dem gegebenen Verhältniſſe in H, d. h. ich mache

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = a$$

oder

$$\overline{BH} : \overline{CH} = a : 1$$

oder

$$\overline{BH} + \overline{CH} : \overline{BH} = a + 1 : a$$

alſo

$$\overline{BH} = \overline{BC}\,\frac{a}{a+1}$$

Eben ſo beſtimme ich auf der Verlängerung von $\overline{BC}$ einen andern Punkt H', ſo daſs $\overline{BH'}$, $\overline{CH'}$ auch in dem gegebenen Verhältniſſe ſtehen, d. h. daſs man

$$\overline{BH'} : \overline{CH'} = a : 1$$

oder

$$\overline{BH'} - \overline{CH'} : BH' = a - 1 : a \text{ habe,}$$

woraus man

$$\overline{BH'} = \overline{BC} \cdot \frac{a}{a-1}$$

erhält.

Dann beſchreibe ich auf $\overline{HH'}$ einen Kreis, deſſen Umfang die Linie $\overline{MN}$ in zwey Punkten ſchneiden wird in A, A', die beyde der Aufgabe Genüge leiſten.

Denn (199.) der Umkreis $HAA'H'$ iſt der geometriſche Ort aller Punkte, deren Entfernungen von den Punkten B, C in dem gegebenen Verhältniſſe a ſtehen.

Will man den analytiſchen Ausdruck von $\overline{HH'}$, oder $\overline{DA}$, ſo weiſs man, daſs

$$\overline{HH'}^2 = \overline{BH'} \cdot \overline{CH'} - \overline{BH} \cdot \overline{CH} \quad (197.)$$

Nun iſt wie vorhin

$$\overline{CH} = \overline{BC} \cdot \frac{1}{a+1}$$

$$\overline{CH'} = \overline{BC} \cdot \frac{1}{a-1}$$

alſo

$$\overline{HH'}^2 = \overline{BC}^2 \left(\frac{a}{(a-1)^2} - \frac{a}{(a+1)^2} \right) = 4aa\,\overline{BC}^2$$

Alſo

$$\overline{HH'} = 2a : \overline{BC}$$

$$\overline{DA} = a \cdot \overline{BC}$$

und

$$1 : a = \overline{BC} : \overline{DA} .$$

Sollte man ſtatt auf der graden Linie $\overline{MN}$ auf irgend einer Curve den Punkt A finden, deſſen Entfernungen von zwey gegebenen Punkten in gegebenem Verhältniſſe wären, ſo würden die Punkte, wo der Kreis HAH' die Curve ſchneiden würde, der Aufgabe Genüge leiſten.

326. Wäre folgende Aufgabe zu löſen:

3 Punkte B, H, C ſind willkührlich auf einer graden Linie angenommen, man ſoll auf einer andern gegebenen Linie $\overline{MN}$ einen Punkt A finden, ſo daſs, wenn man von dieſem Punkte, zu den 3 gegebenen Punkten B, H, C 3 Linien zieht, die beyden Winkel $B\hat{A}H$, $C\hat{A}H$ gleich ſind,

ſo würde man nur einen Punkt H' ſuchen müſſen, ſo daſs

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}$$

Beſchriebe man dann über $\overline{HH'}$ einen Kreis, ſo würden die Punkte A, A', wo dieſer Kreis die gegebene Linie $\overline{MN}$ ſchnitte, der Frage Genüge leiſten. Denn wir ſahen (199.), daſs der Kreis HAH' auch der geometriſche Ort aller Punkte iſt, die ſo liegen, daſs $B\hat{A}H = C\hat{A}H$

327. Hätte man dieſe andere Aufgabe:

Wenn 4 Punkte B, H, C, D willkührlich auf einer gegebenen Linie angenommen werden (Fig. 128.), auſserhalb dieſer Linie einen Punkt A zu finden, ſo daſs, wenn man die 4 Linien $\overline{AB}$, $\overline{AH}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ zieht,

$$B\hat{A}H = H\hat{A}C = C\hat{A}D$$

ſo müſste man erſt, wie vorhin, auf dieſer Linie den Punkt H' ſuchen, ſo daſs

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}$$

Vier und vierzigſte Aufgabe.

329. Zwey Kreiſe *AFBG*, *ACBD* ſind gegeben (Fig. 112.) und eine Sehne $\overline{FG}$ iſt in einem von ihnen gezogen; dann ſoll man in dem andern eine Sehne $\overline{CD}$ von gegebner Gröſse ziehen und ſo daſs die 4 Endpunkte *F*, *G*, *C*, *D* alle in einem Kreiſe liegen.

Man ziehe die Sehne $\overline{AB}$, und durch den Punkt *K*, wo ſie die Sehne $\overline{FG}$ ſchneidet, ziehe man im Kreiſe *ACBD* eine Sehne $\overline{CD}$ von der gegebenen Gröſse. Dieſe Conſtruction folgt unmittelbar aus (306.).

Fünf und vierzigſte Aufgabe.

330. In einem gegebenen Kreiſe ein Dreyeck *abc* zu beſchreiben (Fig. 130.), deſſen 3 Seiten durch 3 gegebene Punkte *A*, *B*, *C*, gehen.

Dieſe Aufgabe gilt für ſchwer und mehrere groſse Geometer haben ſich damit beſchäftigt. Caſtillon gab zuerſt eine Auflöſung in den Berliner Memoiren vom Jahr 1776. Sie iſt ſynthetiſch, ſinnreich, aber verwickelt. Lagrange gab in demſelben Bande eine ſehr ſchöne ganz analytiſche, deren Conſtruction Lexell im 4ten Bande der neuen Petersburger Commentarien, auf Eulers Ermunterung gab. Er fügt hinzu, er habe ſie vergeblich auf das eingeſchriebene Viereck anzuwenden geſucht, doch hat er bey der Gelegenheit eine intereſſante Eigenſchaft dieſer Figuren entdeckt. Oltajano fand eine ſehr elegante ſynthetiſche Auflöſung,

die

die er auf alle eingeſchriebenen Vielecke ausdehnte und im 4ten Bande der Memoiren der Italiäniſchen Geſellſchaft bekannt machte. Malfatti gab in demſelben Bande noch eine Auflöſung des ſo allgemeiner gemachten Problems.

Folgende Auflöſung iſt vermiſcht und nähert ſich der Lagrangiſchen. Ich glaube nur die Anſetzung der Gleichung vereinfacht zu haben. Da ſie nicht auf das Dreyeck beſchränkt iſt, will ich ſie ſo ausdrücken:

In einem gegebenen Kreiſe ein Vieleck *abcde* zu beſchreiben (Fig. 131.), deſſen Seiten durch eben ſo viel gegebene Punkte *A, B, C, D, E* gehen.

K ſey der Mittelpunkt, man ziehe nach den gegebenen Punkten die Linien $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, $\overline{KD}$, $\overline{KE}$, und nach den geſuchten $\overline{Ka}$, $\overline{Kb}$, $\overline{Kc}$, $\overline{Kd}$, $\overline{Ke}$.

Es ſey ferner

$r =$ Halbmeſſer des Kreiſes

$a, b, c, d, e = \overline{AK}, \overline{BK}, \overline{CK}, \overline{DK}, \overline{EK}$

$a', b', c', d', e' = A\hat{K}B, B\hat{K}C, C\hat{K}D, D\hat{K}E, E\hat{K}A.$

Als Unbekannte wollen wir annehmen

$$A\hat{K}a = t$$
$$B\hat{K}b = u$$
$$C\hat{K}c = x$$
$$D\hat{K}d = y$$
$$E\hat{K}e = z$$

Dann giebt das Dreyeck *AKb*

$$\overline{AK} + \overline{bK} : \overline{AK} - \overline{bK} = tg\tfrac{1}{2}(A\hat{b}K + b\hat{A}K) : tg\tfrac{1}{2}(A\hat{b}K - b\hat{A}K)$$

oder

$$cof\,A = \frac{b'}{2c'} + \frac{c'}{2b'} - \frac{b'c'}{2a'a'}$$

und eben ſo

$$cof\,B = \frac{a'}{2c'} + \frac{c'}{2a'} - \frac{a'c'}{2b'b'}$$

$$cof\,C = \frac{a'}{2b'} + \frac{b'}{2a'} - \frac{a'b'}{2c'c'}$$

ſo haben wir die 3 Winkel und brauchen nur die Seiten zu ſuchen.

Das rechtwinklichte Dreyeck ABH giebt $\overline{AH} : \overline{AB} = sin\,B : 1$

alſo

$$c = \frac{a'}{\sqrt{1 - cof\,B^2}}$$

eben ſo

$$a = \frac{b'}{\sqrt{1 - cof\,C^2}}$$

$$b = \frac{c'}{\sqrt{1 - cof\,A^2}}$$

Sieben und dreyſsigſte Aufgabe.

320. Ein Dreyeck FGH (Fig. 123.) iſt gegeben, darum ein anderes Dreyeck ABC zu beſchreiben, ſo daſs, wenn man aus jedem Winkel des letztern, ein Perpendikel auf die gegenüberſtehende Seite ſenkt, dieſe Perpendikel genau in die Punkte F, G, H, fallen, welche die Scheitelpunkte des erſten ſind.

Es seyen $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ die Perpendikel aus den Winkeln A, B, C auf die gegenüberstehenden Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$.

Die Tafel Aufgabe XVI (167.) giebt uns

$$\hat{FHG} = 2\pi - 2A \text{ oder}$$
$$A = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{FHG} \text{ (Form. 28.)}$$

und eben so (Form. 29, 30.)

$$B = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{FGH}$$
$$C = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{GFH}$$

die 3 Winkel des Dreyecks ABC sind also bekannt.

Um zu construiren, bemerke man, dass dieselbe Tafel (Form. 16, 17, 18.)

$$\hat{BHF} = A$$
$$\hat{BFH} = C$$
$$\hat{CGH} = B$$

giebt. Man braucht also nur durch den Scheitel H eine Linie $\overline{BC}$ zu ziehen, die mit der gegebenen Linie $\overline{FH}$ den Winkel $\hat{BHF} = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{FHG}$ macht, durch den Scheitel F eine andere Linie $\overline{AB}$, die mit $\overline{FH}$, den Winkel $\hat{BFH} = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{GFH}$ macht, und endlich durch G eine Linie $\overline{AC}$, die mit $\overline{GH}$, den Winkel $\hat{CGH} = \pi - \tfrac{1}{2}\hat{FGH}$ macht. Diese 3 Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, sind die 3 Seiten des gesuchten Dreyecks.

Acht und dreyssigste Aufgabe.

321. Eine Sehne $\overline{BC}$ (Fig. 124.) ist beliebig in einem Kreise gezogen. Auf dem Umfange dieses Kreises einen Punkt A zu finden, so dass, wenn man die Sehnen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, die Perpendikel auf diese Sehnen

$\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, und die Linie $\overline{FG}$ zieht, der Winkel $A\hat{C}E$, den dieſe Linie mit dem Perpendikel $\overline{AH}$ macht, einem gegebenen Winkel gleich ſey.

Die 16te Aufgabe (167.) zeigt (Form. 31.), daſs der gegebene Winkel $A\hat{I}F = \pi - (C - B)$. Der Winkel A iſt bekannt, weil er auf einer gegebenen Sehne ſteht. Bekanntlich iſt auch

$$2\pi = A + B + C$$

addirt man die beyden Gleichungen, ſo kommt

$$2\pi + A\hat{I}F = \pi + A + 2B$$

alſo

$$B = \frac{\pi + A\hat{I}F - A}{2}$$

und

$$C = \frac{3\pi - A\hat{I}F - A}{2}$$

Dieſe Aufgabe, und die vorige, zeigen, daſs man oft vortheilhaft unmittelbar die Winkel beſtimmt, ſtatt goniometriſche Functionen zu gebrauchen, durch die dieſe Aufgaben leicht auf eine ſehr verwickelte Analyſe führen könnten.

Vierzigſte Aufgabe.

322. In einem gegebenen Viereck ein Quadrat zu beſchreiben.

Es ſey $ABCD$ (Fig. 125.) das Viereck, $mnpq$ das geſuchte Quadrat. Da ich das Viereck kenne, kenne ich auch ſeine Winkel. Wäre nun noch ein einziger von denen bekannt, die durch die gegenſeitige Lage des Vielecks und des Quadrats beſtimmt werden,

z. B. $B\hat{m}n$, so würden alle andern durch simple Additionen und Subtractionen erhalten. Hätte man die Winkel, so brauchte man nur den absoluten Werth der Seite des Quadrats zu suchen, wozu das Verhältniss der Seiten eines Dreyecks mit dem Sinus der gegenüberstehenden Winkel leicht führt. Ich nehme also als Unbekannte die Seite $\overline{mn}$ und den Winkel $B\hat{m}n$, und nenne

$$\overline{mn} = y$$
$$B\hat{m}n = z$$

Die 4 Winkel des Vierecks $= A, B, C, D$

$$\overline{AB} = m$$
$$\overline{BC} = n$$
$$\overline{CD} = p$$
$$\overline{DA} = q$$

den rechten Winkel $= \pi$

So erhalte ich

$$A\hat{m}q = \pi - z$$
$$A\hat{q}m = \pi - A + z$$
$$D\hat{q}p = A - z$$
$$D\hat{p}q = 2\pi - D - A + z$$
$$m\hat{n}B = 2\pi - B - z$$
$$p\hat{n}C = B + z - \pi$$
$$n\hat{p}C = 3\pi - B - C - z$$

Jetzt ist es leicht, die Linien der Figur zu berechnen.

Das Dreyeck Bmn giebt

$$\overline{Bn} : \overline{mn} = \sin Bmn : \sin mBn$$

oder

$$\overline{Bn} = \frac{y \cdot \sin z}{\sin B}$$

und

$$\overline{Bm} = \frac{y \cdot \mathit{fin}\,(B + z)}{\mathit{fin}\,B}$$

Eben ſo giebt das Dreyeck Amq

$$\overline{Am} = \frac{y\,\mathit{cof}\,(A - z)}{\mathit{fin}\,A}$$

das Dreyeck npC

$$\overline{nC} = - \frac{y\,\mathit{cof}\,(B + C + z)}{\mathit{fin}\,C}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in folgende evidente Gleichungen

$$\overline{AB} \text{ oder } m = \overline{Am} + \overline{Bm}$$
$$\overline{BC} \text{ oder } n = \overline{Bn} + \overline{Cn}$$

ſo hat man

$$m = \frac{y\,\mathit{cof}\,(A - z)}{\mathit{fin}\,A} + \frac{y \cdot \mathit{fin}\,(B + z)}{\mathit{fin}\,B} \ldots\ldots (A)$$

$$n = \frac{y\,\mathit{fin}\,z}{\mathit{fin}\,B} - \frac{y\,(B + C + z)}{\mathit{fin}\,C} \ldots\ldots (B)$$

alſo

$m \cdot \mathit{fin}\,A \cdot \mathit{fin}\,C \cdot \mathit{fin}\,z - m\,\mathit{fin}\,A \cdot \mathit{fin}\,B \cdot \mathit{cof}\,(B + C + z)$
$= n \cdot \mathit{fin}\,B \cdot \mathit{fin}\,C \cdot \mathit{cof}\,(A - z) + n\,\mathit{fin}\,A \cdot \mathit{fin}\,C \cdot \mathit{fin}\,(B + z)$

Entwickelt man die Quantitäten $\mathit{cof}\,(B + C + z)$, $\mathit{cof}\,(A - z)$ $\mathit{fin}\,(B + z)$, ſo hat man, nachdem man durch $\mathit{cof}\,z$ dividirt hat,

$$tgz = \frac{n \cdot \mathit{fin}\,A \cdot \mathit{fin}\,B \cdot \mathit{fin}\,C + n \cdot \mathit{fin}\,B \cdot \mathit{fin}\,C \cdot \mathit{cof}\,A + m \cdot \mathit{fin}\,A \cdot \mathit{fin}\,C + m\,\mathit{fin}\,A \cdot \mathit{fin}\,B \cdot \mathit{fin}\,(B + C) - n\,\mathit{fin}\,A \cdot \mathit{fin}\,B \cdot \mathit{cof}\,(B + C)}{\mathit{fin}\,A \cdot \mathit{fin}\,B \cdot \mathit{fin}\,C - n\,\mathit{fin}\,A \cdot \mathit{fin}\,C \cdot \mathit{cof}\,B}$$

323. Dieſe Gleichung vom erſten Grade zeigt nur eine Auflöſung an. Freylich gehören zu tgz zwey

Bogen, da aber ihr Unterschied $= 2\pi$ ist, so ist die zweyte Auflösung mit der ersten identisch.

Die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit genommen hat 3 Auflösungen, da der Punkt m auch auf der verlängerten Linie jenseits A, oder B seyn könnte. Sie würde also auch auf eine Gleichung vom 3ten Grade führen, wenn nicht durch unsere Wahl der Unbekannten die 3 Wurzeln rational würden.

Ein und vierzigste Aufgabe.

324. In einem gegebenem Dreyecke, ein anderes gegebenes Dreyeck zu beschreiben.

Es sey ABC (Fig. 126.) das Dreyeck, in dem das Dreyeck abc beschrieben werden soll, so dass die Winkel a, b, c sich auf den Seiten von ABC selbst, oder auf deren Verlängerungen befinden.

Als Unbekannte nehme ich den Winkel $\hat{Abc} = z$, weil durch ihn alle anderen gegeben sind.

Es sollen nun heisen

die 3 Winkel des Dreyecks AEC . . . . A, B, C
die gegenüberstehenden Seiten . . . . . A', B', C'
die 3 Winkel des Dreyecks abc . . . . a, b, c
die gegenüberstehenden Seiten . . . . . a', b', c'

so ist

$$\hat{Acb} = 2\pi - A - z$$
$$\hat{Cba} = 2\pi - b - z$$
$$\hat{Bca} = 2\pi - c - \hat{Acb} = A - c + z$$
$$\hat{Bac} = 2\pi - A - B + c - z$$
$$\hat{Cab} = b - C + z$$

Jetzt kann man alle Segmente $\overline{Ab}$, $\overline{Ac}$, $\overline{Ba}$, $\overline{Bc}$, $\overline{Ca}$, $\overline{Cb}$ leicht finden. Es ist nämlich

$$\overline{Ac} = \frac{a \,.\, \sin z}{\sin A}$$

$$\overline{cB} = \frac{b \,.\, \sin(A+B-c+z)}{\sin B}$$

also

$$C = \frac{a \,.\, \sin z}{\sin A} + \frac{b \,.\, \sin(A+B-c+z)}{\sin B.}$$

oder wenn man mit $\sin A \,.\, \sin B$ multiplicirt

$$C \,.\, \sin A \,.\, \sin B = a \,.\, \sin B \,.\, \sin z + b \,.\, \sin A \,.\, \sin (A+B-c+z) \ldots . \quad (A)$$

Durch Entwickelung von $\sin(A+B-c+z)$ erhalte ich

$$C \,.\, \sin A \,.\, \sin B - \{a \sin B + b \,.\, \sin A \cos(A+B-c)\} \sin z = b \,.\, \sin A \,.\, \sin(A+B-c) \sqrt{1-\sin z^2}$$

also

$$\sin z^2 - \sin z \,.\, \frac{2\,C \sin A \,.\, \sin B \,\{a \sin B + b \,.\, \sin A \,.\, \sin(A+B-c)\}}{\{a \,.\, \sin B + b \sin A \,.\, \cos(A+B-c)\}^2 + bb \,.\, \sin(A+B-c)^2} = \frac{bb \,.\, \sin(A+B-c)^2 - CC \,.\, \sin A^2 \,.\, \sin B^2}{\{a \sin B + b \sin A \,.\, \cos(A+B-c)\}^2 + bb \sin(A+B-c)^2}$$

eine Gleichung vom 2ten Grade, die doch 4 Auflösungen giebt, da zu jedem Werth von $\sin z$ zwey verschiedene Winkel gehören.

Zwey und vierzigſte Aufgabe.

325. Auf einer gegebenen Linie $\overline{MN}$ (Fig. 127.) einen Punkt A zu finden, deſſen Entfernungen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, von zwey gegebenen Punkten B, C in gegebenem Verhältniſſe ſtehen.

Es ſey $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = a$, durch B und C ziehe ich die unbeſtimmte Linie $\overline{BCH'}$. Ich theile den Zwiſchenraum $\overline{BC}$ in dem gegebenen Verhältniſſe in H, d. h. ich mache

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = a$$

oder

$$\overline{BH} : \overline{CH} = a : 1$$

oder

$$\overline{BH} + \overline{CH} : \overline{BH} = a + 1 : a$$

alſo

$$\overline{BH} = \overline{BC} \frac{a}{a+1}$$

Eben ſo beſtimme ich auf der Verlängerung von $\overline{BC}$ einen andern Punkt H', ſo daſs $\overline{BH'}$, $\overline{CH'}$ auch in dem gegebenen Verhältniſſe ſtehen, d. h. daſs man

$$\overline{BH'} : \overline{CH'} = a : 1$$

oder

$$\overline{BH'} - \overline{CH'} : BH' = a - 1 : a \text{ habe,}$$

woraus man

$$\overline{BH'} = \overline{BC} \cdot \frac{a}{a-1}$$

erhält.

Dann beſchreibe ich auf $\overline{HH'}$ einen Kreis, deſſen Umfang die Linie $\overline{MN}$ in zwey Punkten ſchneiden wird in A, A', die beyde der Aufgabe Genüge leiſten.

Denn (199.) der Umkreis $HAA'H'$ iſt der geometriſche Ort aller Punkte, deren Entfernungen von den Punkten B, C in dem gegebenen Verhältniſſe a ſtehen.

Will man den analytiſchen Ausdruck von $\overline{HH'}$, oder $\overline{DA}$, ſo weiſs man, daſs

$$\overline{HH'}^2 = \overline{BH'} \cdot \overline{CH'} - \overline{BH} \cdot \overline{CH} \quad (197.)$$

Nun iſt wie vorhin

$$\overline{CH} = \overline{BC} \cdot \frac{1}{a+1}$$

$$\overline{CH'} = \overline{BC} \cdot \frac{1}{a-1}$$

alſo

$$\overline{HH'}^2 = \overline{BC}^2 \left(\frac{a}{(a-1)^2} - \frac{a}{(a+1)^2} \right) = 4aa\,\overline{BC}^2$$

Alſo

$$\overline{HH'} = 2a : \overline{BC}$$

$$\overline{DA} = a \cdot \overline{BC}$$

und

$$1 : a = \overline{BC} : \overline{DA} .$$

Sollte man ſtatt auf der graden Linie $\overline{MN}$ auf irgend einer Curve den Punkt A finden, deſſen Entfernungen von zwey gegebenen Punkten in gegebenem Verhältniſſe wären, ſo würden die Punkte, wo der Kreis HAH' die Curve ſchneiden würde, der Aufgabe Genüge leiſten.

326. Wäre folgende Aufgabe zu löſen:

5 Punkte B, H, C ſind willkührlich auf einer graden Linie angenommen, man ſoll auf einer andern gegebenen Linie $\overline{MN}$ einen Punkt A finden, ſo daſs, wenn man von dieſem Punkte, zu den 3 gegebenen Punkten B, H, C 3 Linien zieht, die beyden Winkel $B\hat{A}H$, $C\hat{A}H$ gleich ſind,

ſo würde man nur einen Punkt H' ſuchen müſſen, ſo daſs

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}$$

Beſchriebe man dann über $\overline{HH'}$ einen Kreis, ſo würden die Punkte A, A', wo dieſer Kreis die gegebene Linie $\overline{MN}$ ſchnitte, der Frage Genüge leiſten. Denn wir ſahen (199.), daſs der Kreis HAH' auch der geometriſche Ort aller Punkte iſt, die ſo liegen, daſs $B\hat{A}H = C\hat{A}H$

327. Hätte man dieſe andere Aufgabe:

Wenn 4 Punkte B, H, C, D willkührlich auf einer gegebenen Linie angenommen werden (Fig. 128.), aufserhalb dieſer Linie einen Punkt A zu finden, ſo daſs, wenn man die 4 Linien $\overline{AB}$, $\overline{AH}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ ziehet,

$B\hat{A}H = H\hat{A}C = C\hat{A}D$

ſo müſste man erſt, wie vorhin, auf dieſer Linie den Punkt H' ſuchen, ſo daſs

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}$$

dann den Punkt C', so dass

$$\overline{HC} : \overline{DC} = \overline{HC'} : \overline{DC'}$$

Dann aber $\overline{HH'}$, und $\overline{CC'}$ zwey Kreise beschreiben, ihr Durchschnittspunkt A wäre der gesuchte Punkt.

Drey und vierzigste Aufgabe.

328. Man kennt die 3 Winkel eines Dreyecks, und die Entfernungen der 3 Scheitelpunkte von einem in derselben Ebene gegebenen Punkte, man soll die 3 Seiten des Dreyecks finden.

ABC (Fig. 129.) sey das gegebene Dreyeck, D der gegebene Punkt. Man kennt also die 3 Winkel A, B, C, und ihre Entfernungen $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, man sucht

$$\overline{BC} = a$$
$$\overline{AC} = b$$
$$\overline{AB} = c$$

Mit den Winkeln sind die Verhältnisse der Seiten gegeben, man braucht also nur den absoluten Werth einer einzigen zu suchen.

Ich fange mit der Construction einer ähnlichen Figur an, indem ich zuerst ein Dreyeck abc beschreibe, welches dem Dreyeck ABC ähnlich ist. Dann suche ich einen Punkt d, der in der neuen Figur so liegt, wie D in der alten, und ziehe die Linien $\overline{ad}$, $\overline{bd}$, $\overline{cd}$. Die Dreyecke ABD, abd werden ähnlich seyn, also verhalten sich die Entfernungen $\overline{ad}$, $\overline{bd}$, wie $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, und sind folglich in gegebenem Verhältnisse. Beschreibt man nun (325.) einen Kreis, der der geome-

trische Ort aller Punkte ist, deren Abstände von a, b, sich wie $\overline{AD} : \overline{BD}$ verhalten, so wird dieser Kreis durch den Punkt d gehen.

Eben so wenn man einen Kreis beschreibt, der der geometrische Ort für alle Punkte ist, deren Abstände von a, c, sich wie $\overline{AD} : \overline{CD}$ verhalten, wird dieser andere Kreis auch durch d gehen. d ist also gegeben und die ganze ähnliche Figur construirt, so dass man durch blosse Proportionen die gesuchten Grösen finden kann. Es ist also

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{ab}}{\overline{ad}}$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{ac}}{\overline{ad}}$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{bc}}{\overline{ad}}.$$

Wir kommen noch (332.) auf diese Aufgabe zurück.

Eben so könnte man die Aufgabe auflösen:

Wenn man alle Winkel kennt, die je zwey von den Kanten einer 3ekkigten Pyramide bilden, und die Entfernungen ihrer 4 Scheitelpunkte von irgend einem Punkt im Raume, alle Dimensionen dieser Pyramide zu finden.

Vier und vierzigſte Aufgabe.

329. Zwey Kreiſe *AFBG*, *ACBD* ſind gegeben (Fig. 112.) und eine Sehne $\overline{FG}$ iſt in einem von ihnen gezogen; dann ſoll man in dem andern eine Sehne $\overline{CD}$ von gegebner Gröſse ziehen und ſo daſs die 4 Endpunkte *F*, *G*, *C*, *D* alle in einem Kreiſe liegen.

Man ziehe die Sehne $\overline{AB}$, und durch den Punkt *K*, wo ſie die Sehne $\overline{FG}$ ſchneidet, ziehe man im Kreiſe *ACBD* eine Sehne $\overline{CD}$ von der gegebenen Gröſse. Dieſe Conſtruction folgt unmittelbar aus (306.).

Fünf und vierzigſte Aufgabe.

330. In einem gegebenen Kreiſe ein Dreyeck *abc* zu beſchreiben (Fig. 130.), deſſen 3 Seiten durch 3 gegebene Punkte *A*, *B*, *C*, gehen.

Dieſe Aufgabe gilt für ſchwer und mehrere groſse Geometer haben ſich damit beſchäftigt. Caſtillon gab zuerſt eine Auflöſung in den Berliner Memoiren vom Jahr 1776. Sie iſt ſynthetiſch, ſinnreich, aber verwickelt. Lagrange gab in demſelben Bande eine ſehr ſchöne ganz analytiſche, deren Conſtruction Lexell im 4ten Bande der neuen Petersburger Commentarien, auf Eulers Ermunterung gab. Er fügt hinzu, er habe ſie vergeblich auf das eingeſchriebene Viereck anzuwenden geſucht, doch hat er bey der Gelegenheit eine intereſſante Eigenſchaft dieſer Figuren entdeckt. Oltajano fand eine ſehr elegante ſynthetiſche Auflöſung,

die

die er auf alle eingeſchriebenen Vielecke ausdehnte und im 4ten Bande der Memoiren der Italiäniſchen Geſellſchaft bekannt machte. Malfatti gab in demſelben Bande noch eine Auflöſung des ſo allgemeiner gemachten Problems.

Folgende Auflöſung iſt vermiſcht und nähert ſich der Lagrangiſchen. Ich glaube nur die Anſetzung der Gleichung vereinfacht zu haben. Da ſie nicht auf das Dreyeck beſchränkt iſt, will ich ſie ſo ausdrücken:

In einem gegebenen Kreiſe ein Vieleck $abcde$ zu beſchreiben (Fig. 131.), deſſen Seiten durch eben ſo viel gegebene Punkte A, B, C, D, E gehen.

K ſey der Mittelpunkt, man ziehe nach den gegebenen Punkten die Linien $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, $\overline{KD}$, $\overline{KE}$, und nach den geſuchten $\overline{Ka}$, $\overline{Kb}$, $\overline{Kc}$, $\overline{Kd}$, $\overline{Ke}$.

Es ſey ferner

$r =$ Halbmeſſer des Kreiſes

$a, b, c, d, e = \overline{AK}, \overline{BK}, \overline{CK}, \overline{DK}, \overline{EK}$

$a', b', c', d', e' = A\hat{K}B, B\hat{K}C, C\hat{K}D, D\hat{K}E, E\hat{K}A.$

Als Unbekannte wollen wir annehmen

$$A\hat{K}a = t$$
$$B\hat{K}b = u$$
$$C\hat{K}c = x$$
$$D\hat{K}d = y$$
$$E\hat{K}e = z$$

Dann giebt das Dreyeck AKb

$\overline{AK} + \overline{bK} : \overline{AK} - \overline{bK} = tg\frac{1}{2}(A\hat{b}K + b\hat{A}K) : tg\frac{1}{2}(A\hat{b}K - b\hat{A}K)$

Da nun

$$A\hat{b}K + b\hat{A}K = \text{suppl. } A\hat{K}b = \text{suppl. } (A\hat{K}B + B\hat{K}b)$$
$$= \text{suppl. } (a' + u)$$

so hat man

$$tg\tfrac{1}{2}\,(A\hat{b}K + b\hat{A}K) = \frac{1}{tg\tfrac{1}{2}\,(a' + u)}$$

Ferner

$$A\hat{b}K - b\hat{A}K = b\hat{a}K - b\hat{A}K = A\hat{K}a = t$$

also

$$tg\tfrac{1}{2}\,(A\hat{b}K - b\hat{A}K) = tg\tfrac{1}{2}\,t$$

und

$$a + r : a - r = \frac{1}{tg\tfrac{1}{2}\,(a' + u)} : tg\tfrac{1}{2}\,t$$

oder

$$\frac{a-r}{a+r} = tg\tfrac{1}{2}\,t \cdot \frac{tg\tfrac{1}{2}\,a' + tg\tfrac{1}{2}\,u}{1 - tg\tfrac{1}{2}\,a' \cdot tg\tfrac{1}{2}\,u}$$

und daraus zieht man

$$tg\tfrac{1}{2}\,t = \frac{\frac{a-r}{a+r} - \frac{a-r}{a+r} \cdot tg\tfrac{1}{2}\,a' \cdot tg\tfrac{1}{2}\,u}{tg\tfrac{1}{2}\,a' + tg\tfrac{1}{2}\,u}$$

Jede Seite des Vielecks muſs uns eine ähnliche Gleichung geben, wir haben also folgende Gleichungen, deren eben so viel sind, als der gegebenen Punkte

$$tg\tfrac{1}{2}\,t = \frac{\frac{a-r}{a+r} - \frac{a-r}{a+r} \cdot tg\tfrac{1}{2}\,a' \cdot tg\tfrac{1}{2}\,u}{tg\tfrac{1}{2}\,a' + tg\tfrac{1}{2}\,u}$$

$$tg\tfrac{1}{2}\,u = \frac{\frac{b-r}{b+r} - \frac{b-r}{b+r} \cdot tg\tfrac{1}{2}\,b' \cdot tg\tfrac{1}{2}\,x}{tg\tfrac{1}{2}\,b' + tg\tfrac{1}{2}\,x}$$

$$tg\tfrac{1}{2}x = \frac{\frac{c-r}{c+r} - \frac{c-r}{c+r} \cdot tg\tfrac{1}{2}c' \cdot tg\tfrac{1}{2}y}{tg\tfrac{1}{2}c' + tg\tfrac{1}{2}y}$$

$$tg\tfrac{1}{2}y = \frac{\frac{d-r}{d+r} - \frac{d-r}{d+r} \cdot tg\tfrac{1}{2}d' \cdot tg\tfrac{1}{2}z}{tg\tfrac{1}{2}d' + tg\tfrac{1}{2}z}$$

$$tg\tfrac{1}{2}z = \frac{\frac{e-r}{e+r} - \frac{e-r}{e+r} \cdot tg\tfrac{1}{2}e' \cdot tg\tfrac{1}{2}t}{tg\tfrac{1}{2}e' + tg\tfrac{1}{2}t}.$$

Aus dieſen Gleichungen beſtimmt man leicht jede beliebige Unbekannte, z. B. x.

Aus der 3ten Gleichung erhält man x in Werthen von y, man ſubſtituirt für y deſſen Werth in z aus der 4ten Gleichung gezogen u. ſ. w. bis man lauter Werthe von u hat, die man durch die 2te Gleichung in x ausdrückt.

Obgleich dieſe Rechnung etwas lang ſcheint, ſo wird ſie durch die Symmetrie der Formeln erleichtert, woraus man auch leicht ableitet, daſs die Endgleichung nie über den 2ten Grad ſteigen kann.

Wir wollen der Kürze wegen

$$tg\tfrac{1}{2}t = t'$$
$$tg\tfrac{1}{2}u = u'$$
$$tg\tfrac{1}{2}x = x'$$
$$tg\tfrac{1}{2}y = y'$$
$$tg\tfrac{1}{2}z = z'$$

ſetzen, ſo haben die gefundenen Gleichungen folgende Form:

$$t' = \frac{A + Bu'}{C + Du'}$$

$$u' = \frac{A' + B'x'}{C' + D'x}$$

$$x' = \frac{A'' + B''y'}{C'' + D''y'}$$

$$y' = \frac{A''' + B'''z'}{C''' + D'''z'}$$

$$z' = \frac{A'''' + B''''.t'}{C'''' + D''''.t'}$$

Subſtituirt man in die erſte Gleichung für u', deſſen Werth aus der zweyten, ſo wird offenbar die neue Gleichung die Form

$$t' = \frac{A''''' + B'''''x'}{C''''' + D'''''x'}$$

haben, alſo hat ſie ihre Form nicht geändert; eben ſo geht es bis zur Endgleichung, die alſo quadratiſch werden muſs.

Sechs und vierzigſte Aufgabe.

331. Wenn von den 4 Seiten und 2 Diagonalen eines Vierecks, 5 gegeben ſind, die 6te zu finden.

Es ſey $ABDC$ (Fig. 132.) das Viereck und

$$\overline{AB} = m$$
$$\overline{AC} = n$$
$$\overline{BD} = p$$
$$\overline{CD} = q$$
$$\overline{AD} = r$$
$$\overline{BC} = s$$

Ferner

$$\hat{BDC} = x$$
$$\hat{ADC} = y$$
$$\hat{ADB} = z$$

wir haben folglich $x = y + z$, alſo

$$cof\, x = cof\, y \,.\, cof\, z - ſin\, y \,.\, ſin\, z$$

oder

$$ſin\, y \,.\, ſin\, z = cof\, y \,.\, cof\, z - cof\, x$$

quadrirt

$$ſin\, y^2 \,.\, ſin\, z^2 = cof\, y^2 \,.\, cof\, z^2 + cof\, x^2 - 2\, cof\, x \,.\, cof\, y \,.\, cof\, z$$

oder

$$(1 - cof\, y^2)\,(1 - cof\, z^2) = cof\, y^2 \,.\, cof\, z^2 + cof\, x^2 - 2\, cof\, x \,.\, cof\, y \,.\, cof\, z$$

oder

$$1 + 2\, cof\, x \,.\, cof\, y \,.\, cof\, z = cof\, x^2 + cof\, y^2 + cof\, z^2 \ldots\ldots \text{(A)}$$

Nun erhält man aus den 3 Dreyecken BDC, ADC, ADB

$$cof\, x = \frac{pp + qq - ss}{2\,pq}$$

$$cof\, y = \frac{qq + rr - nn}{2\,qr}$$

$$cof\, z = \frac{pp + rr - mm}{2\,pr}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichung (A) und multiplicirt mit $4\,pp\,qq\,rr$, ſo hat man

$$4\,pp\,qq\,rr + (pp + qq - ss)\,(qq + rr - nn)\,(pp + rr - mm) = rr\,(pp + qq - ss)^2 + pp\,(qq + rr - nn)^2 + qq\,(pp + rr - mm)^2 \ldots\ldots \text{(B)}$$

Entwickelt man und ſetzt

$mm, nn, pp, qq, rr, ss = \mu, \nu, \pi, \varkappa, \varrho, \sigma$

ſo kommt

$$(\mu\varkappa\varkappa + \varkappa\mu\mu + \nu\pi\pi + \pi\nu\nu + \varrho\sigma\sigma + \sigma\varrho\varrho) + (\mu\nu\sigma + \mu\pi\varrho + \nu\varkappa\varrho + \pi\varkappa\sigma)$$
$$-(\mu\nu\pi + \mu\nu\varkappa + \mu\pi\varkappa + \mu\varkappa\varrho + \mu\varkappa\sigma + \mu\varrho\sigma + \nu\pi\varkappa + \nu\pi\varrho + \nu\pi\sigma + \varkappa\varrho\sigma + \pi\varrho\sigma + \varkappa\varrho\sigma) = 0$$

Dieſe Formel iſt, da μ, ν, π u. ſ. w. Quadrate ſind, ohne Zeichen zu verändern, auf alle correlative Syſteme anwendbar, d. h. auf die 3 Arten von Vierecken, von denen wir (103.) ſprachen (Fig. 132, 133, 134.).

Man erhält auch jede von den Gröſsen μ, ν, u. ſ. w. wenn 5 gegeben ſind, durch eine quadratiſche Gleichung daraus, und darauf m, n, p, u. ſ. w. da

$$\pm r_\mu = m$$
$$\pm r_\nu = n \text{ u. ſ. w.}$$

Dieſe Formel ſtimmt mit denen überein, die Lexell und Euler gefunden haben. Man kann auch durch den Lehrſatz (196.) dahin kommen, dieſer Weg ſchien mir aber der kürzeſte.

332. Wir wollen die (328.) behandelte Aufgabe wieder vornehmen:

Wenn die 3 Winkel eines Dreyecks gegeben ſind, und die Entfernungen ihrer 3 Scheitelpunkte von einem 4ten Punkte in derſelben Ebene, die 3 Seiten dieſes Dreyecks zu finden.

ABC ſey das geſuchte Dreyeck (Fig. 135.), *D* der gegebene Punkt, ſo wird *ABCD* ein Viereck ſeyn,

in dem die 3 Seiten $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ bekannt sind, dazu die Verhältnisse unter einander der 3 übrigen Seiten.

Es sey

$$\overline{AB} = m$$
$$\overline{AC} = n$$
$$\overline{BC} = s$$
$$\overline{BD} = p$$
$$\overline{CD} = q$$
$$\overline{AD} = r$$

so wird die vorige Formel auf dies Viereck anwendbar seyn. Man hat ferner

$$m = s \frac{\sin C}{\sin A}$$
$$n = s \frac{\sin B}{\sin A}$$

Substituirt man diese Werthe, so enthält die Formel nur eine Unbekannte, nehmlich s, die man leicht bestimmen kann.

333. Wenn die 4 Seiten eines Vierecks gegeben sind, und das Product seiner Diagonalen, diese Diagonalen zu finden.

Es sey $ABDC$ (Fig. 132.) das Viereck, die 4 gegebenen Seiten

$$m = \overline{AB}$$
$$n = \overline{AC}$$
$$p = \overline{BD}$$
$$q = \overline{CD}$$

r, s die beyden unbekannten Diagonalen und

$$rs = k$$

alſo

$$ss = \frac{kk}{rr} \text{ d. h. } s = \frac{kk}{e}$$

Subſtituirt man dieſen Werth von s in die Formel, ſo erhält man eine quadratiſche Gleichung.

334. 3 Kreiſe in derſelben Ebene ſind gegeben, einen 4ten zu beſchreiben, der ſie alle berühre.

A, B, C (Fig. 136.) ſeyen die Mittelpunkte der 3 Kreiſe, D der des geſuchten, der Halbmeſſer der 3 gegebenen, a, b, c, der des geſuchten $= x$

$$\overline{AB} = m$$
$$\overline{AC} = n$$
$$\overline{BD} = p$$
$$\overline{CD} = q$$
$$\overline{AD} = r$$
$$\overline{BC} = s$$

m, n, s ſind nach der Vorausſetzung gegeben, und wenn man x gefunden hat, ſo ergeben ſich p, q, r, durch die Gleichungen

$$p = b + x$$
$$q = c + x$$
$$r = a + x$$

Es bleibt alſo nur x zu finden, aber $ABDC$ iſt ein Viereck, man kann alſo darauf die Formel (331.) anwenden, d. h. man ſubſtituirt für p, q, r, die gefundenen Werthe in x, ſo bekommt man am Ende eine quadratiſche Gleichung.

Ich führe die Rechnung nicht aus, weil die Aufgabe von Geometern des erſten Ranges, Vieta, Newt-

ton, Euler, Gunfs, ſchon behandelt iſt. Mein Zweck war nur zu zeigen, daſs die Formel ſehr vieler Anwendungen fähig iſt. Nachher werde ich ſie auf die Berechnung der Vielecke und Polyeder anwenden.

Sieben und vierzigſte Aufgabe.

335. Wenn man die 4 Seiten und 2 Diagonalen eines Vierecks kennt, die Segmente dieſer Diagonalen zu finden, und diejenigen Segmente, welche entſtehen, wenn man die Seiten bis zum Zuſammentreffen verlängert. (Fig. 137.)

Es iſt genug, wenn 5 von den 6 angeführten Stücken gegeben ſind, um die übrigen zu beſtimmen, aber da man durch die vorige Aufgabe aus den 5 das 6te finden kann, ſo wollen wir ſie hier alle 6 als gegeben betrachten.

H ſey der Durchſchnittspunkt der beyden Diagonalen, *F* der der verlängerten Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und *G* der der verlängerten Seiten $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Man ſoll alſo beſtimmen

1) die 4 Segmente $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$ auf den Diagonalen.

2) die 8 Segmente $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{BG}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$ auf den verlängerten Seiten.

Es ſeyen

$$\overline{BH} = x \qquad \overline{AB} = m$$
$$\overline{CH} = y \qquad \overline{AC} = n$$
$$\overline{AH} = u \qquad \overline{BD} = p$$
$$\overline{DH} = v \qquad \overline{CD} = q$$
$$\overline{AD} = r$$
$$\overline{BC} = s$$

Die Dreyecke ABC, BDC geben (196.)

$$uus = mmy + nnx - sxy$$
$$vvs = ppy + qqx - sxy$$

Subtrahirt man, und bemerkt, daſs

$$vv - uu = (v + u)(v - u) = r(v - u)$$

ſo hat man

$$sr(v - u) = y(pp - mm) + x(qq - nn)$$

und eben ſo

$$sr(y - x) = u(qq - pp) + v(nn - mm)$$

aber

$$v = r - u$$
$$y = s - x$$

alſo nach Reduction

$$s(mm + rr - pp) - 2sru = x(mm + qq - nn - pp)$$
$$r(mm + ss - nn) - 2srx = u(mm + qq - nn - pp)$$

Eliminirt man u, ſo erhalten wir

$$x = \frac{s(mm + rr - pp).(mm + qq - nn - pp) - 2srr(mm + ss - nn)}{(mm + qq - nn - pp)^2 - (2sr)^2}$$

Die 3 andern Segmente finden ſich durch ähnliche Gleichungen. Man ſieht alſo, daſs, wenn die Seiten und Diagonalen eines Vierecks gegeben ſind, jedes der 4 Segmente auf den Diagonalen durch eine Gleichung vom erſten Grade erhalten werden kann.

Eben so kann man die 8 Segmente auf den verlängerten Seiten erhalten, mag man nun sie durch eine ähnliche Rechnung suchen, oder nach (101.) die Correlation der Figuren aufstellen.

Hat man die Segmente der Diagonalen, so kann man aus ihnen die der Seiten herleiten.

Das Dreyeck ABH giebt mir (218.)

$$\overline{AD}.\overline{DH}.\overline{BC} = \overline{BF}.\overline{AD}.\overline{CH}$$

also weil

$$\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB}$$

hat man

$$\overline{AF}.\overline{DH}.\overline{BC} = \overline{AF}.\overline{AD}.\overline{CH} + \overline{AB}.\overline{AD}.\overline{CH}$$

und folglich

$$\overline{AF} = \frac{\overline{AB}.\overline{AD}.\overline{CH}}{\overline{DH}.\overline{BC} - \overline{DA}.\overline{CH}}$$

eine allgemein anwendbare Formel, da die einzige Quantität darin, die invers werden kann, nur im Quadrate vorkommt.

Acht und vierzigste Aufgabe.

336. Wenn man die 4 Seiten und 2 Diagonalen eines Vierecks $ABCD$ kennt, die Transversale $\overline{PQ}$ zu finden, die durch 2 Punkte, P, Q, willkührlich auf den gegenüberstehenden Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ angenommen gezogen wird. (Fig. 138.)

Ich ziehe die 4 Linien $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CP}$, $\overline{DP}$, dann haben wir (196.) im Dreyecke PDC

$$\overline{PQ}^2.\overline{DC} = \overline{PD}^2.\overline{CQ} + \overline{PC}^2.\overline{DQ} - \overline{DC}.\overline{DQ}.\overline{CQ}$$

Nun ſind, $\overline{DC}$, $\overline{DQ}$, $\overline{CQ}$ nach der Hypotheſe gegeben, man muſs alſo nur $\overline{PD}^2$, $\overline{PC}^2$ ſuchen.

Eben ſo giebt das Dreyeck ADB

$$\overline{PD}^2.\overline{AB} = \overline{BD}^2.\overline{AP} + \overline{AD}^2.\overline{BP} - \overline{AB}.\overline{AP}.\overline{BP}.$$

und das Dreyeck ACB

$$\overline{PC}^2.\overline{AB} = \overline{AC}^2.\overline{BP} + \overline{BC}^2.\overline{AP} - \overline{AB}.\overline{AP}.\overline{BP}$$

alſo

$$\overline{PQ}^2 = \frac{1}{\overline{AB}.\overline{DC}}\{(\overline{AP}.\overline{CQ}.\overline{BD}^2 + \overline{BP}.\overline{CQ}.\overline{AD}^2 + \overline{BP}.\overline{DQ}.\overline{AC}^2 + \overline{AP}.\overline{DQ}.\overline{BC}^2) - (\overline{AB}.\overline{AP}.\overline{BP}.\overline{CQ} + \overline{AB}.\overline{AP}.\overline{BP}.\overline{DQ} + \overline{AB}.\overline{DC}.\overline{CQ}.\overline{DQ})\}$$

Neun und vierzigſte Aufgabe.

337. Das vollſtändige Viereck mit ſeinen 3 Diagonalen in allen möglichen Fällen aufzulöſen.

Man wird ſich erinnern, daſs ich die Vereinigung von 4 in einer Ebene gezogenen graden Linien, ein vollſtändiges Viereck nenne, daſs dies vollſtändige Viereck 3 einfache Vierecke von verſchiedener Form umfaſst, wenn jedes 2 Diagonalen hat, die ſich insgeſammt aber auf 3 Diagonalen reduciren laſſen. So beſteht alſo mein vollſtändiges Viereck aus 7 unbeſtimmt verlängerten graden Linien und umfaſst 51 Theile (30 Linien, und 21 Winkel), von denen nur 5 gegeben zu ſeyn brauchen, um alle übrigen zu finden. Dies iſt alſo das Problem der Tetragonometrie, in ſeiner gröſsten Allgemeinheit.

Wir werden denſelben Gang beobachten wie (146 u. fgg.) bey der Trigonometrie, d. h. wir nehmen

willkührlich 5 davon als Maafsſtab zur Vergleichung und bilden eine allgemeine Tafel, in der alle 51 Theile in Werthen dieſer 5 vorkommen.

Es ſey alſo (Fig. 84.) $AFDG$ das vollſtändige Viereck mit ſeinen 3 Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{FG}$, $\overline{BC}$.

Wir wollen zu den 5 Gegebenen der Segmente

$$\overline{AF}, \overline{FB}, \overline{BH}, \overline{HC}, \overline{CG}$$

auf den 3 Seiten des Dreyecks ABC annehmen, ſo hat man gleich anfangs durch (3 Form. 228.) das 6te.

Aus dieſen 6 Segmenten findet man die 3 Transverſalen $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ durch (196.).

Dann kann man das Dreyeck ABH z. B. betrachten, das durch die Transverſale CF geſchnitten wird und man hat (1ſte Formel 228.)

$$\overline{AF}.\overline{BC}.\overline{DH} = \overline{BF}.\overline{HC}.\overline{AD}$$

Eben ſo hat man offenbar

$$\overline{AH} = \overline{AD} + \overline{DH}$$

man kann alſo aus der Combination dieſer Gleichungen $\overline{AD}$ und $\overline{DH}$ finden, wie auch $\overline{BD}$, $\overline{DG}$, $\overline{CD}$, $\overline{FD}$.

Dann erhält man $\overline{AK}$ und $\overline{DK}$, durch folgende Gleichungen:

$$\overline{AK}.\overline{DH} = \overline{DK}.\overline{AH} \text{ . . (4 Form. 228.)}$$

$$\overline{AD} = \overline{AK} + \overline{DK}$$

Durch den Satz (196.) findet man $\overline{FG}$, $\overline{FK}$, $\overline{GK}$.

Die 4te Formel (228.) giebt $\overline{LF}$,

$$\overline{LF}.\overline{GK} = \overline{LG}.\overline{FK}$$

oder

$$\overline{LF}.\overline{GK} = (\overline{LF} + \overline{FG}).\overline{FK}$$

Eben ſo findet man $\overline{LG}$,

$\overline{LB}$, $\overline{LC}$ folgen aus den Gleichungen

$$\overline{LB}.\overline{CH} = \overline{LC}.\overline{BH}$$

$$\overline{LC} = \overline{LB} + \overline{BC}$$

So hat man ſchon alle Linien der Figur, die Winkel laſſen ſich leicht finden. Die ganze Figur beſteht nämlich aus lauter Dreyecken, deren Seiten bekannt ſind.

Iſt ſo die Tafel für die Urfigur entworfen, ſo ſtellt man auch die allgemeine Tafel der Correlation für alle Figuren auf, die nach denſelben Formeln behandelt werden können.

Funfzigſte Aufgabe.

338. Das allgemeine Problem der Polygonometrie zu löſen, d. h. jedes in einer Ebene beſchriebene Vieleck mit allen Diagonalen zu beſtimmen, wenn eine hinreichende Anzahl Gegebener vorhanden iſt. Man nimmt übrigens die Seiten und Diagonalen unbeſtimmt verlängert an.

Man reducirt die Aufgabe auf die Bildung einer Tafel aller Quantitäten, die als Theile des vorgelegten Syſtems vorkommen, indem man dieſe Quantitäten, wenn das Vieleck n Seiten hat, durch Werthe von $2n-3$ unter ihnen ausdrückt.

Dies angenommen ſey $ABCDEF$ (Fig. 139.) das gegebene Vieleck. Ich nehme als Mittel zur Vergleichung eine Seite wie $\overline{AB}$, und ihre Entfernungen $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ u. ſ. w. von allen andern Winkeln

zu den erſten A, B, wodurch in der That die Zahl von $2n-3$ Gegebenen herauskommt.

Wenden wir nun auf die Vierecke $ABCD$, $ABDE$, $ABEF$, u. ſ. w. die $\overline{AB}$ zur Grundlinie, und jedes eine von den Seiten haben, die nicht unter denen begriffen ſind, durch die wir die andern ausdrükken wollen, die Formeln der vorigen Aufgabe an, ſo findet man alle ihre Seiten, Diagonalen u. ſ. w. und erhält ſo die geſuchte allgemeine Tafel, wodurch man alle Aufgaben, die das Vieleck betreffen, auflöſen kann.

Das Problem wird weit einfacher, wenn man das Vieleck ohne ſeine Diagonalen betrachtet, denn dann ſind immer nur 3 Unbekannte zu finden, alſo auch nur 3 Gleichungen zu bilden. Dieſe 3 Gleichungen giebt uns die Eigenſchaft an die Hand, daſs in jedem Vielecke jede Seite gleich der Summe aller andern iſt, wenn man ſie reſpective mit dem Coſinus des Winkels multiplicirt, den ſie mit der erſten bilden. Man braucht alſo nur, um die 3 Gleichungen zu haben, dieſen Satz auf irgend 3 Seiten des Vielecks anzuwenden, wobey die Wahl dieſer Seiten die Rechnung mehr oder weniger vereinfachen wird. Ich kann hier nicht aufs Einzelne gehen, überdieſs ſind ſchon die Vierecke in 2 ſchönen Diſſertationen von Lexell in den Petersburger Memoiren, und die Vielecke überhaupt in L'huillier Polygonometrie behandelt. Beyde gingen von etwas andern Grundſätzen aus als ich; mir genügt es, an einem Beyſpiele zu zeigen, wie man in jedem Fall, von dem meinigen ausgehend, die 3 Gleichungen bilden kann.

Es ſey alſo $ABCDE$ (Fig. 139.) ein Fünfeck, worin alles gegeben iſt, nur nicht die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, und der eingeſchloſſene Winkel $A\hat{B}C$.

Den Winkel $A\hat{B}C = B$ giebt die Gleichung, wo $\pi = 90°$

$$A + B + C + D + E = 6\pi$$

alſo

$$B = 6\pi - (A + C + D + E)$$

Da B bekannt iſt, ſo brauchen wir nur 2 Gleichungen, um

$$AB = x$$
$$BC = y$$

zu finden. Wir haben alſo

$$x = \overline{AE} \,.\, cof\, \overline{AB}\hat{\overline{AE}} \,.\, + \overline{ED} \,.\, cof\, \overline{AB}\hat{\overline{ED}} + \overline{DC}\, cof\, \overline{AB}\hat{\overline{DC}} + y\, cof\, \overline{AB}\hat{\overline{CB}}$$

$$y = x \,.\, cof\, \overline{BC}\hat{\overline{BA}} + \overline{AE} \,.\, cof\, \overline{BC}\hat{\overline{AE}} + \overline{ED} \,.\, cof\, \overline{BC}\hat{\overline{ED}} + \overline{DC} \,.\, cof\, \overline{BC}\hat{\overline{DC}}.$$

Nun iſt aber

$$\overline{AB}\hat{\overline{AE}} = A$$

und wenn man $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ verlängert, bis ſie ſich in m treffen, ſo hat man

$$\overline{AB}\hat{\overline{ED}} = A\hat{m}E = A + E - 2\pi$$

Eben ſo

$$\overline{AB}\hat{\overline{DC}} = 4\pi - (A + E + D)$$

und endlich

$$\overline{AB}\hat{\overline{CB}} = B$$

die erſte Gleichung wird alſo

$$x = \overline{AE} \,.\, cof\, A - \overline{ED} \,.\, cof\, (A + E) + \overline{DC}\, cof\, (A + E + D) + y \,.\, cof\, B$$

Durch

Durch ähnliche Betrachtungen wird die 2te

$$y = x\,cof\,B - \overline{AE}.cof\,(B+A) + \overline{ED}\,cof(B+A+E) + \overline{DC}\,cof\,C;$$

lineare Gleichungen, aus denen man leicht den Werth von x und y zieht.

Diese Art der Vielecke ohne Diagonalen u. s. w. zu betrachten, nennt man gewöhnlich Polygonometrie. Aber die vorige Aufgabe ist weit allgemeiner gefafst: ich betrachte darin das Vieleck mit allen seinen Diagonalen und ins Unendliche verlängerten Seiten, und umfasse auch die Vielecke, die nicht in einer Ebene liegen, auf die auch der obige Grundsatz anwendbar, aber für die er unzureichend ist.

Ein und funfzigste Aufgabe.

339. Wenn von den 3 Winkeln, die an der Spitze einer dreyeckigten Pyramide durch die 3 Kanten, die sich da vereinigen, gebildet werden, und den 3 Winkeln, die eben so an einer andern Spitze derselben Pyramide entstanden sind, 5 gegeben werden, den 6ten zu finden.

Es sey $DBCA$ (Fig. 140.) die gegebene 3eckigte Pyramide. Ich vergleiche die Spitzen D, B, und suche das Verhältnifs zwischen den 3 Winkeln $B\hat{D}C$, $A\hat{D}C$, $A\hat{D}B$, und den 3 Winkeln $D\hat{B}C$, $A\hat{B}C$, $D\hat{B}A$.

Es ſey

$$B\hat{D}C = a$$
$$A\hat{D}C = b$$
$$A\hat{D}B = c$$
$$D\hat{B}C = a'$$
$$A\hat{B}C = b'$$
$$D\hat{B}A = c'$$

Das Dreyeck DCA giebt

$$\overline{CA}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DA}^2 - 2\overline{DC} \cdot \overline{DA} \cdot \cos C\hat{D}A$$

Eben ſo haben wir

$$\overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{BA} \cdot \cos C\hat{B}A$$

aus beyden Gleichungen folgt

$$(\overline{DC}^2 - \overline{BC}^2) + (\overline{DA}^2 - \overline{BA}^2) - 2\overline{DC} \cdot \overline{DA} \cdot \cos C\hat{D}A + 2\overline{BC} \cdot \overline{BA} \cdot \cos C\hat{B}A = 0$$

aber wir haben auch

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\sin B\hat{D}C}{\sin D\hat{C}B}$$

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\sin D\hat{B}C}{\sin D\hat{C}B}$$

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\sin B\hat{D}A}{\sin D\hat{A}B}$$

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{BD}} = \frac{\sin D\hat{B}A}{\sin D\hat{A}B},$$

Zieht man aus dieſen 4 Gleichungen die Werthe von $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{BA}$, $\overline{DA}$, und ſubſtituirt in der vorher gefundenen Gleichung, ſo haben wir, wenn wir alles mit $\overline{BD}$ dividiren,

$$\frac{\sin D\hat{B}C^2}{\sin D\hat{C}B^2} - \frac{\sin B\hat{D}C^2}{\sin D\hat{C}B^2} + \frac{\sin D\hat{B}A^2}{\sin D\hat{A}B^2} - \frac{\sin B\hat{D}A^2}{\sin D\hat{A}B^2} =$$

$$2\cos . C\hat{D}A \frac{\sin D\hat{B}C . \sin D\hat{B}A}{\sin D\hat{C}B . \sin D\hat{A}B} -$$

$$2\cos . C\hat{B}A \frac{\sin B\hat{D}C . \sin B\hat{D}A}{\sin D\hat{C}B . \sin D\hat{A}B} \quad \ldots \text{(A)}$$

Dieſe Gleichung enthält noch die Winkel $D\hat{C}B$, $D\hat{A}B$, die eliminirt werden müſſen, welches leicht vermittelſt der Gleichungen

$\sin D\hat{C}B = \sin (a + a')$

$\sin D\hat{A}B = \sin (c + c')$ geſchieht.

Subſtituirt man dieſe Werthe in (A), ſo erhält man

$$\frac{\sin a'^2}{\sin(a+a')^2} - \frac{\sin a^2}{\sin(a+a')^2} + \frac{\sin c'^2}{\sin(c+c')^2} - \frac{\sin c^2}{\sin(c+c')^2} =$$

$$2\cos b \frac{\sin a' . \sin c'}{\sin (a + a') \sin (c + c')} -$$

$$2\cos b' \frac{\sin a . \sin c}{\sin (a + a') \sin (c + c')} \quad \ldots \text{(B)}$$

Um die Nenner herauszuſchaffen, braucht man nur mit $\sin (a + a')^2 \sin (c + c')^2$ zu multipliciren, ſo kommt

$\{\sin a'^2 - \sin a^2\} \sin (c + c')^2 + \{\sin c'^2 - \sin c^2\}$
$\sin (a + a')^2 = 2 \sin (a + a') \sin (c + c') \{\sin a' .$
$\sin c' . \cos b - \sin a . \sin b . \cos b'\}$

aber da

$\sin a'^2 - \sin a^2 = \sin (a' + a) \sin (a' - a)$

$\sin c'^2 - \sin c^2 = \sin (c' + c) \sin (c' - c)$

ſo erhalten wir durch Subſtitution dieſer Werthe und Diviſion mit $\sin (a' + a) \sin (c' + c)$

$$\sin(a'+a)\sin(c'-c)+\sin(c'+c)\sin(a'-a)=\sin a'.\sin c'.\cos b-\sin a.\sin c.\cos b' \quad \ldots (C)$$

340. Wenn die Kante DB ſenkrecht auf der Ebene BCA ſteht, ſo wird der Winkel $C\hat{A}B$, die Projection des Winkels $C\hat{D}A$, und $D\hat{B}C$, $D\hat{B}A$ ſind rechte. Nennt man nun den rechten Winkel π, ſo hat man

$$a'=\pi$$
$$c'=\pi$$

die Gleichung (C) wird alſo

$$\cos a.\cos c=\cos b-\sin a.\sin c.\cos b'; \quad \ldots (D)$$

eine Gleichung, die den Projectionswinkel b' giebt, wenn man die 3 Winkel a, b, c, die an der Spitze dieſes Winkels D gebildet werden, eliminirt.

Da in dieſem Falle der Winkel $B\hat{D}C$ oder a das Complement von $B\hat{C}D$, dem Neigungswinkel der Linie $\overline{BC}$ auf BCA iſt, und $D\hat{B}A$ oder c, das Complement des Neigungswinkels von $\overline{DA}$ auf derſelben Ebene, ſo kann man die vorige Gleichung in dieſe Form ſetzen:

$$\cos C\hat{A}B=\frac{\cos C\hat{D}A-\sin D\hat{C}B.\sin D\hat{A}B}{\cos D\hat{C}B.\cos D\hat{A}B} \quad \ldots (E)$$

woraus man den Projectionswinkel $C\hat{A}B$ eines bekannten Winkels $C\hat{D}A$ in Werthen der Neigungswinkel $D\hat{C}B$, $D\hat{A}B$ erhält.

341. Die Formel (D) umfaſst in ihren Entwikkelungen die ganze ſphäriſche Trigonometrie. Denn betrachtet man (Fig. 140, 141.) D als den Mittelpunkt einer Kugel, ſo werden die 3 Winkel $B\hat{D}C$, $C\hat{D}A$, $B\hat{D}A$, oder a, b, c, die 3 Seiten des ſphäriſchen

Dreyecks ſeyn, das auf der Oberfläche der Kugel durch die Durchſchnitte der 3 Ebenen BDC, CDA, BDA, entſteht; und der Winkel $C\hat{B}A$ oder b', d. h. der, den der Durchſchnitt der beyden Ebenen BDC, BDA bildet, wird der der Seite b entgegenſtehende Winkel ſeyn. Nennt man alſo die 3 Seiten des ſphäriſchen Dreyecks a, b, c, die gegenüberſtehenden Winkel A, B, C, ſo hat man

$$b' = B$$
$$a' = A$$
$$c' = C$$

und die Gleichung (D) auf dies ſphäriſche Dreyeck angewandt

$$\left.\begin{array}{l} \cos a . \cos c = \cos b - \sin a . \sin c . \cos B \\ \text{und aus eben dem Grunde haben wir} \\ \cos b . \cos c = \cos a - \sin b . \sin c . \cos A \\ \cos a . \cos b = \cos c - \sin a . \sin b . \cos C \end{array}\right\} \ldots (F)$$

Wir können alſo, wenn 3 von den 6 bey dem ſphäriſchen Dreyecke vorkommenden Theilen gegeben ſind, aus dieſen Gleichungen die 3 andern beſtimmen.

342. Will man dieſe Gleichungen direct ſuchen, ſo kann man durch eine einfache Rechnung dahin gelangen.

Es ſey ABC (Fig. 142.) das gegebene ſphäriſche Dreyeck, D der Mittelpunkt der Kugel, wir wollen die 3 Halbmeſſer $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$, ziehen, und durch den Scheitelpunkt A, die beyden Tangenten $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$, ſo hat man

$$B'\hat{A}C' = A$$
$$BDC = a$$
$$C\hat{D}A = b$$
$$C\hat{D}B = c$$

Die ebenen Dreyecke $AB'C'$, $DB'C'$ geben

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\,\overline{AB'}.\overline{AC'}.\cos B'\hat{A}C'$$
$$\overline{B'C'}^2 = \overline{B'D}^2 + \overline{C'D}^2 - 2.\overline{B'D}.\overline{C'D}.\cos B'\hat{D}C'$$

zieht man dieſe beyden Gleichungen von einander ab, und ſetzt den Halbmeſſer der Kugel $= 1$, ſo hat man

$$\overline{B'D}^2 - \overline{AB'}^2 = 1$$
$$\overline{C'D}^2 - \overline{AC'}^2 = 1$$

alſo

$$1 + \overline{AB'}.\overline{AC'}.\cos A - \overline{B'D}.\overline{C'D}.\cos a = 0$$

oder weil

$$\overline{AB'} = \frac{\sin c}{\cos c}$$
$$\overline{AC'} = \frac{\sin b}{\cos b}$$
$$\overline{B'D} = \frac{1}{\cos c}$$
$$\overline{C'D} = \frac{1}{\cos b}$$

$$1 + \frac{\sin b\,.\,\sin c\,.}{\cos b\,.\,\cos c\,.}\cos A - \frac{\cos a}{\cos b\,.\,\cos c} = 0$$

oder

$$\cos b.\cos c = \cos a - \sin b.\sin c.\cos A.$$ wie vorher.

343. Man kann bemerken, daſs dieſe Gleichung ſich unmittelbar aus dem folgern läſst, was (243) geſagt iſt, denn $AB'C'D$ iſt offenbar ein Viereck,

das nicht in einer Ebene liegt, welches nach dem Grundſatze (259.)

$$\overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\,\overline{AB'}.\overline{AC'}.\mathit{cof}\,B'\hat{A}C' = \overline{DB'}^2 + \overline{DC'}^2 - 2\,\overline{DB'}.\overline{DC'}\,\mathit{cof}\,B'\hat{D}C$$

giebt, welches eben die Gleichung iſt, die wir fanden.

Man ſieht, daſs dieſe Formel das für ſphäriſche Dreyecke iſt, was für gradlinigte Dreyecke die Formel

$$\mathit{cof}\,A = \frac{bb + cc - aa}{2\,bc}$$

Nennt man in den Gleichungen (F) als Unbekannte $\mathit{cof}\,a$, $\mathit{cof}\,b$, $\mathit{cof}\,c$, und zieht ihren Werth daraus, ſo erhält man

$$\mathit{cof}\,A.\mathit{cof}\,C = \mathit{cof}\,B + \mathit{cof}\,b.\mathit{ſin}\,A.\mathit{ſin}\,C$$
$$\mathit{cof}\,A.\mathit{cof}\,B = \mathit{cof}\,C + \mathit{cof}\,c.\mathit{ſin}\,A.\mathit{ſin}\,B$$
$$\mathit{cof}\,B.\mathit{cof}\,C = \mathit{cof}\,A + \mathit{cof}\,a.\mathit{ſin}\,B.\mathit{ſin}\,C.$$

Gleichungen, die mit den erſten von einerley Geſtalt ſind und die man aus ihnen zieht, wenn man die kleinen und groſsen Buchſtaben vertauſcht, und dann das Zeichen der Coſinus ändert; was man auch durch die Supplementar-Dreyecke beweiſen kann.

Zwey und funfzigſte Aufgabe.

344. Die 3 Seiten eines ſphäriſchen Dreyecks ABC (Fig. 143.) ſind gegeben, deſſen Grundlinie in 2 willkührliche Segmente bey H getheilt iſt, man ſoll den Transverſalbogen $\overset{\frown}{AH}$ finden, der durch A und H geht.

Die Winkel ſeyen

$$A,\ B,\ C,$$

die gegenüberſtehenden Seiten

$$a,\ b,\ c,$$

die beyden bekannten Segmente

$$a',\ a''$$

der geſuchte Bogen $= b'$

ſo haben wir aus den Dreyecken ABC, ACH

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \,.\, \cos c}{\sin a \,.\, \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b' - \cos a' \,.\, \cos c}{\sin a' \,.\, \sin c}$$

daraus

$$\cos b' = \{\cos b - \cos a \,.\, \cos c\} \frac{\sin a'}{\sin a} + \cos a' \,.\, \cos c$$

Dieſe Formel iſt der analog, die wir für grade Dreyecke (196.) gefunden haben.

Multiplicirt man alles mit $\sin a$, ſo kommt

$$\{\cos b' - \cos a' \,.\, \cos c\} \sin a = \{\cos b - \cos a \,.\, \cos c\} \sin a'$$

Drey und funfzigſte Aufgabe.

345. Die 3 Seiten eines ſphäriſchen Dreyecks ABC (Fig. 143.) ſind gegeben, und die beyden Seiten $\overset{\frown}{BA}$, $\overset{\frown}{BC}$ willkührlich in G, H getheilt, man ſoll den Transverſalbogen $\overset{\frown}{GH}$ finden.

Zu den vorigen Bezeichnungen kommen nur

die beyden Segmente $\overset{\frown}{BH}$, $\overset{\frown}{CH}$ . . . . a', a''

die beyden Segmente $\overset{\frown}{BG}$, $\overset{\frown}{AG}$ . . . . c', c''

die geſuchte Transverſale $\overline{GH} = b''$

Dann haben wir

$$cof\ B = \frac{cof\ b - cof\ a\ .\ cof\ c}{fin\ a\ .\ fin\ c}$$

$$cof\ B = \frac{cof\ b' - cof\ a'\ .\ cof\ c'}{fin\ a'\ .\ fin\ c'}$$

Alſo

$$cof\ b' = \{cof\ b - cof\ a\ .\ cof\ c\}\frac{fin\ a'\ .\ fin\ c'}{fin\ a\ .\ fin\ c} + cof\ a'\ .\ cof\ c'$$

Dieſe Formel iſt der (298.) für gradlinigte Dreyecke analog.

Schafft man den Nenner heraus, ſo kommt

$$\{cof\ b' - cof\ a'\ .\ cof\ c'\}\ fin\ a\ .\ fin\ c = \{cof\ b - cof\ a\ .\ cof\ c\}\ fin\ a'\ .\ fin\ c'$$

Vier und funfzigſte Aufgabe.

346. Wenn von den 6 Theilen eines ſphäriſchen Vierecks, nämlich den 4 Seiten und 2 Diagonalen 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

$ABDC$ (Fig. 144.) ſey das ſphäriſche Viereck, $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BC}$ die beyden Diagonalen.

Es ſey

$$B\hat{A}C = A$$
$$B\hat{A}D = A'$$
$$C\hat{A}D = A''$$

$\widehat{AB} = m$, $\sin m = m'$, $\cos m = m''$
$\widehat{AC} = n$, $\sin n = n'$, $\cos n = n''$
$\widehat{BD} = p$ $\sin p = p'$ $\cos p = p''$
$\widehat{CD} = q$ $\sin q = q'$ $\cos q = q''$
$\widehat{AD} = r$ $\sin r = r'$ $\cos r = r''$
$\widehat{BC} = s$ $\sin s = s'$ $\cos s = s''$

Weil

$$A = A' + A''$$

so haben wir

$1 + 2\cos A \cdot \cos A' \cdot \cos A'' = \cos A^2 + \cos A'^2 + \cos A''^2$ . . . . (A)

Ferner geben die Dreyecke *BAC, BAD, CAD*

$$\cos A = \frac{s'' - m'' \cdot n''}{m' \cdot n'}$$

$$\cos A' = \frac{p'' - m''r''}{m'r'}$$

$$\cos A'' = \frac{q'' - n''r''}{n'r'}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in (A) und multiplicirt mit $m'm' \cdot n'n' \cdot r'r'$ ſo kommt

$m'm' \cdot n'n' \cdot r'r' + 2(p'' - m'' \cdot r'')(q'' - n''r'')(s'' - m''n'') = m'm'(q'' - n''r'')^2 + n'n'(p'' - m''r'')^2 + r'r'(s'' - m''n'')^2$

Eine Gleichung, die nur die 6 Quantitäten enthält, deren Relation man verlangt.

Setzt man in dieſe Gleichung ſtatt des Quadrats des Sinus die Einheit weniger dem Quadrate des Coſinus, und führt dann die angegebenen Verrichtungen aus, ſo hat man

$$\left.\begin{array}{l} 1-(m''m''+n''n''+p''p''+q''q''+r''r''+s''s'') \\ +(m''m'.q''q''+n''n''.p''p''+r''r''.s''s'') \\ +2(m''n''s''+m''p''r''+n''q''r''+p''q''s'') \\ -2(m''n''p''q''+m''q''r''s''+n''p''r''s'') \end{array}\right\}=0$$

347. Dieſe Formel iſt der analog, die wir (331.) für das gradlinigte Viereck gefunden haben. Jeder Coſinus eines Winkels, der darin vorkommt, kann durch eine quadratiſche Gleichung gefunden werden, wenn die andern 5 bekannt ſind.

Man kann dieſe Aufgabe auch ſo ausdrücken:

Wenn von den 6 Winkeln, welche die 4 Kanten einer viereckigten Pyramide, zu zweyen verbunden, bilden, 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

Fünf und funfzigſte Aufgabe.

348. Wenn von den 6 Winkeln, welche von den Seitenflächen einer 3eckigten Pyramide, zu zweyen verbunden, gebildet werden, 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

Es ſey ABC (Fig. 145.) die Grundfläche der Pyramide; auf ſie lege ich die Seitenflächen nieder, und ſtelle ſie durch die Dreyecke ADB, ADC, BDC vor. Es ſey

$$\overline{\overline{BCD}} = A$$
$$\overline{\overline{ACD}} = B$$
$$\overline{\overline{ABD}} = C$$
$$\overline{\overline{ABC}} = D$$

Die Winkel, die diese Flächen zu zweyen verbunden bilden, bezeichne ich so:

$$\hat{CD} = m$$
$$\hat{BD} = n$$
$$\hat{AD} = r$$
$$\hat{BC} = s$$
$$\hat{AC} = p$$
$$\hat{AB} = q$$

Wir haben also nach (254.) folgende Gleichungen, wenn wir die Cosinus der Winkel wie vorhin bezeichnen:

$$A = Bq'' + Cp'' + Dr''$$
$$B = Aq'' + Cs'' + Dn''$$
$$C = Ap'' + Bs'' + Dm''$$
$$D = Ar'' + Bn'' + Cm''$$

Eliminiren wir 3 beliebige der Quantitäten A, B, C, D, so verschwindet die 4te von selbst als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder, und die Gleichung wird

$$\{1 - m''m'' - p''p'' - r''r'' - 2m''p''r''\} \cdot \{1 - m''m'' - n''n'' - s''s'' - 2m''n''s''\} - \{m''n''p'' + m''r''s'' + n''r'' + p''s'' - m''m''q'' + q''\}^2 = 0$$

oder wenn man alles durch $1 - m''m''$ dividirt

$$\left.\begin{array}{l} 1 - (m''m'' + n''n'' + p''p'' + q''q'' + r''r'' + s''s'') \\ + (m''m'' \cdot q''q'' + n''n'' \cdot p''p'' + r''r'' \cdot s''s'') \\ - 2(m''n''s'' + m''p''r'' + n''q''r'' + p''q''s'') \\ - 2(m''n''p''q'' + m''q''r''s'' + n''p''r''s'') \end{array}\right\} = 0$$

Sind also 5 von den Winkeln gegeben, so findet man den 6ten immer durch eine quadratische Gleichung.

349. Wir wollen annehmen, die 3 Seitenflächen A, B, C ſeyen unter einander ſenkrecht, ſo hat man

$$p'' = 0$$
$$q'' = 0$$
$$s'' = 0$$

Die Gleichung wird alſo

$$1 = m''m'' + n''n'' + r''r''$$

wie bekannt iſt.

Nimmt man die Höhe der Pyramide unendlich an, ſo werden m, n, r, rechte Winkel und ihre Coſinus $= 0$; die Winkel s, p, q, fallen in die des Dreyecks ABC, daſs alſo

$$s = A$$
$$p = B$$
$$q = C$$

und folglich

$$1 - 2\,cof A\,.\,cof B\,.\,cof C - cof A^2 - cof B^2 - cof C^2 = 0$$

Eine Eigenſchaft der Winkel jedes Dreyecks.

350. Wir wollen uns vorſtellen, aus einem Punkte innerhalb der Pyramide ſey ein Perpendikel auf jede Seitenfläche geſenkt. Dieſe Linien werden, zu zweyen genommen, offenbar Winkel bilden, die die Supplemente derjenigen ſind, welche die Seitenflächen bilden, d. h. berechnen wir das Perpendikel, das auf A fällt, mit A' u. ſ. w. ſo hat man

$$\hat{A'B'} = 2\pi - \hat{AB}$$
$$\hat{A'C'} = 2\pi - \hat{AC}$$

u. ſ. w.

Bezeichnet man alſo dieſe Winkel mit m', n', p', q', r', s', d. h.

$$\hat{C'D'} = m$$
$$\hat{B'D'} = n$$

u. ſ. w.

ſo hat man

$$m = 2\pi - m'$$
$$n = 2\pi - n'$$

u. ſ. w.

Subſtituirt man dieſe Werthe von m, n, p, q, r, s in die obige Formel, ſo giebt ſie uns das Verhältniſs, das zwiſchen m', n', p', q', r', s' beſteht.

Nun geben die obigen Gleichungen

$$cof\, m = -cof\, m'$$
$$cof\, n = -cof\, n'$$

u. ſ. w.

die neue Gleichung wird alſo mit der erſten einerley Form haben, nur daſs das Zeichen des 4ten Gliedes aus —, + wird.

Da nun die Richtung der Seitenflächen der Pyramide beliebig angenommen ward, ſo kann man dieſe Formel auf die 6 Winkel anwenden, die, zu zweyen verbunden, 4 Linien bilden, die aus einem Punkte im Raume nach beliebigen Richtungen gezogen ſind. Sie iſt alſo auch auf die 6 Winkel anwendbar, die die 4 Kanten des Scheitels einer viereckigten Pyramide, zu zweyen verbunden, unter einander bilden, alſo auch auf die 4 Seiten und 2 Diagonalen eines ſphäriſchen Vierecks.

351. Von den 4 aus einem Punkte ausgehenden Linien wollen wir 3 auf einander ſenkrecht annehmen, z. B. die erſte, zweyte und dritte. Die Winkel

m, *n*, *s*, werden alſo rechte, und ihre Coſinus = o ſeyn. Aus der obigen Gleichung wird dann

$$cof\, p^2 + cof\, q^2 + cof\, r^2 = 1$$

Eben daher wird

$$ſin\, p^2 + ſin\, q^2 + ſin\, r^2 = 2$$

d. h. wenn 3 beliebige grade Linien auf einander ſenkrecht ſind, ſo iſt die Summe der Quadrate der Coſinus der Winkel, die ſie mit einer 4ten graden Linie bilden, dem Quadrate des Sinus totus gleich. Die Summe der Sinus eben der Winkel iſt das Doppelte von der Summe des Coſinus.

352. Stellt man ſich eine auf dieſer 4. Linie ſenkrechte Ebene vor, ſo ſind die Winkel, welche die 3 andern mit dieſer Ebene bilden, die Complemente der Winkel, die ſie mit der 4ten Linie bilden, alſo

Wenn 3 Linien auf einander ſenkrecht ſind, ſo iſt die Summe der Quadrate der Sinus der Winkel, die ſie mit irgend einer Transverſalebene bilden, gleich dem Quadrate des Sinus totus, und die Summe der Quadrate der Coſinus eben dieſer Winkel, das Doppelte der erſten Summe.

Dieſer Satz findet, wie man ſieht, ſeine Anwendungen auf die Winkel, welche die Kanten einer 3eckigten Pyramide mit der Grundfläche eben dieſer Pyramide bilden, wenn dieſe 3 Kanten unter einander ſenkrecht ſind.

Man kann zu denſelben Sätzen auf eine andere Art kommen, die ich hier entwickeln werde.

353. Es ſey $A\hat{K}B$ (Fig. 146.) ein beliebiger Winkel. Wir wollen in ſeiner Ebene zwey auf einander ſenkrechte Axen FF', GG' ziehen, und aus den Punkten A, B, K die Perpendikel $\overline{Aa'}$, $\overline{Aa''}$, $\overline{Bb'}$, $\overline{Bb''}$, $\overline{Kk'}$, $\overline{Kk''}$ auf ſie ſenken, und die Linie AB ziehen. Nun nenne ich die beyden Linien $\overline{KA}$, $\overline{KB}$ . . . A, B

den Winkel, den ſie machen . . . . . k

die Projectionen auf FF', GG' von A . . a', a''

ſo haben wir

$$\overline{AB}^2 = \overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 - 2\,\overline{KA}.\overline{KB}.\cos A\hat{K}B \quad \ldots \text{(A)}$$

Nun iſt aber $\overline{AB}$ die Hypothenuſe eines Dreyecks, deſſen Seiten $\overline{a'b'}$, $\overline{a''b''}$ ſind, alſo

$$\overline{AB}^2 = \overline{a'b'}^2 + \overline{a''b''}^2 = (a'k' - b'k')^2 + (b''k'' - a''k'')^2$$
$$= (a' - b')^2 - (b'' - a'')^2 = a'a' + b'b' + a''a'' + b''b'' - 2a'b' - a''b''$$

Eben ſo hat man

$$\overline{KA}^2 = a'a' + a''a''$$
$$\overline{KB}^2 = b'b' + b''b''$$

Subſtituirt man in den 3 erſten Gliedern der Gleichung (A) die Werthe von $\overline{AB}$, $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, und im letzten Gliede A, B, k für $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $A\hat{K}B$, ſo hat man, nach gehöriger Reduction,

$$A \,.\, B \,.\, \cos k = a'b' + a''b'' \quad \ldots \text{(B)}$$

d. h. überhaupt

Wenn zwey gegebene Linien einen beliebigen Winkel bilden, und wenn man in der Ebene dieſes Winkels zwey auf einander ſenkrechte Axen zieht, ſo iſt das Product der beyden gegebenen Linien in den Cosinus des Winkels, den ſie einſchlieſſen, gleich dem Producte der Projectionen

nen dieſer beyden Linien auf der erſten Axe, wenn man noch das Produkt der Projectionen auf der zweyten Axe dazu addirt.

Wir wollen die Winkel, welche $\overline{KA}$ reſp. mit den Axen $\overline{FF'}$, $\overline{GG'}$ bildet, α', α'' nennen, eben die Winkel von $\overline{AB}$, mit denſelben Axen β', β'', ſo hat man

$$\overline{a'k'} = \overline{AK} \cdot \cos a$$

oder

$$a' = A \cos \alpha'$$
$$a'' = A \cos \alpha''$$
$$b' = B \cos \beta'$$
$$b'' = B \cos \beta''$$

Subſtituirt man dieſe Werthe von a', a'', b', b'', in die vorher gefundene Gleichung (B), ſo haben wir, wenn wir alles mit $A \cdot B$ dividiren,

$$\cos h = \cos \alpha' \cdot \cos \beta' + \cos \alpha'' \cdot \cos \beta'' \ldots \text{(C)}$$

d. h.

Wenn zwey Linien einen beliebigen Winkel bilden, und man in der Ebene dieſes Winkels, willkührlich zwey auf einander ſenkrechte Axen zieht, ſo iſt der Cosinus des Winkels, den die beyden Linien einſchlieſsen, gleich dem Producte der Cosinus der Winkel, welche jede von ihnen mit der erſten Axe bildet, wenn man dazu noch das Product des Cosinus der Winkel addirt, den jede von ihnen mit der zweyten Axe bildet.

354. Dieſe Theorie umfaſst den Fall, wo man, ſtatt den gegebenen Winkel auf 2 Axen in derſelben Ebene zu beziehen, ihn auf 3 ſenkrecte Axen bezieht.

Wir brauchen nur den Punkt H, wo ſich die beyden Axen $\overline{FF'}$ $\overline{GG'}$ ſchneiden, als die Projection einer 3ten auf die beyden erſten ſenkrechten Axe zu betrachten, und die Punkte A, B, K als die Projectionen der wahren Punkte, die ſie vorſtellen, ſo haben wir

$$\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 - 2\,\overline{AK}.\overline{BK}\,\cos k. \qquad (A)$$

wo dieſe Linien die wahren Werthe der Entfernungen zwiſchen den Punkten A, B, K, und nicht ihre Projectionen ausdrücken.

Wie man leicht überſieht, haben wir auch

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (a' - b')^2 + (b'' - a'')^2 + (a''' - b''')^2\\ &= a'a' + b'b' + a''a'' + b''b'' + a'''a''' + b'''b'''\\ &\quad - 2\,a'b' - a''b'' - 2\,a'''b'''\end{aligned}$$

Eben ſo

$$\overline{KA}^2 = a''a'' + a'a' + a'''a'''$$

$$\overline{KB}^2 = a'a' + b''b'' + b'''b'''$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die 3 erſten Glieder der Gleichung (A) und reducirt, ſo kommt

$$A.B.\cos K = a'b' + a''b'' + a'''b''' \qquad (B)$$

d. h.

355. Wenn zwey Linien einen Winkel im Raume bilden und man ihn auf 3 ſenkrechte Axen projicirt, ſo iſt das Product der beyden Linien in den Coſinus des eingeſchloſſenen Winkels gleich der Summe aus dem Produkte der Projection der bey-

den Seiten auf die erſte Axe, dem Producte der Projectionen der beyden Seiten auf die zweyte Axe, und dem Producte der Projectionen eben der Seiten auf die dritte Axe.

Wir wollen die Winkel, die $\overline{KA}$ reſpective mit den 3 Axen bildet,

$$\alpha', \alpha'', \alpha'''$$

nennen, und die 3 Winkel, welche $\overline{KB}$ mit eben den Axen bildet,

$$\beta', \beta'', \beta'''$$

Dann hat man

$$a' = A \cos \alpha'$$
$$a'' = A \cos \alpha''$$
$$a''' = A \cos \alpha'''$$
$$b' = B \cos \beta'$$
$$b'' = B \cos \beta''$$
$$b''' = B \cos \beta'''$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in (A) und reducirt, ſo kommt

$$\cos h = \cos \alpha' . \cos \beta' + \cos \alpha'' . \cos \beta'' + \cos \alpha''' . \cos \beta''' \quad (B)$$

d. h.

Wenn zwey Linien einen Winkel im Raume bilden, und man ſie auf 3 ſenkrechte Axen projicirt, ſo iſt der Coſinus des Winkels, den dieſe Linien bilden, gleich der Summe der Producte der Coſinus der Winkel, welche jede Axe mit den beyden Seiten des gegebenen Winkels bildet.

Wird $K = o$, ſo hat man

$$cof\, h = 1$$
$$\alpha' = \beta'$$
$$\alpha'' = \beta''$$
$$\alpha''' = \beta'''$$

Die Gleichung wird alſo

$$cof\,\alpha'^2 + cof\,\alpha''^2 + cof\,\alpha'''^2 = 1$$

welches der Satz (351.) iſt.

Zieht man in einer Kugel 3 unter einander ſenkrechte Halbmeſſer $= R$, und ſtellt ſich einen 4ten nach beliebiger Richtung vor, den man wie zwey Halbmeſſer betrachtet, die mit einander einen Winkel $= o$ bilden, und wendet die Formel (B) darauf an, ſo haben wir

$$A = R$$
$$B = R \text{ u. ſ. w.}$$
$$cof\, k = 1$$
$$a' = b'$$
$$a'' = b''$$
$$a''' = b'''$$

Die Gleichung wird alſo

$$a'a' + a''a'' + a'''a''' = 1$$

d. h.

Wenn man in einer Kugel 3 auf einander ſenkrechte Halbmeſſer zieht, und aus ihren Endpunkten, die in der Oberfläche der Kugel liegen, Perpendikel auf irgend einen 4ten Halbmeſſer ſenkt, ſo iſt die Summe der Quadrate der Theile dieſes Halbmeſſers, die von dieſen Perpendikeln und dem Mittelpunkt begrenzt wer-

den, immer dieſelbe, und gleich dem Quadrate des Halbmeſſers. Es wird alſo auch die Summe der Quadrate dieſer Perpendikel das Doppelte des Quadrats des Halbmeſſers ſeyn.

Stellt man ſich eine auf dieſen 4ten Radius ſenkrechte Ebene vor, ſo werden die Winkel, die die 3 andern mit dieſer Ebene bilden, die Complemente der Winkel ſeyn, die ſie mit der 4ten Linie bilden, alſo iſt

Die Summe der Quadrate der Projectionen 3er unter einander ſenkrechten Halbmeſſer einer Kugel, auf irgend einer Ebene das Doppelte des Quadrats des Halbmeſſers.

Sechs und funfzigſte Aufgabe.

356. 3 Kreiſe, mögen es gröſste oder kleine ſeyn, ſind auf der Oberfläche einer Kugel gezogen, einen 4ten Kreis zu finden, der die 3 andern berührt.

Es ſeyen *A*, *B*, *C* (Fig. 147.) die Mittelpunkte oder vielmehr die Pole der 3 gegebenen Kreiſe, *D* der des geſuchten. Wir wollen die 4 Punkte *A*, *B*, *C*, *D* durch Bogen von gröſsten Kreiſen verbinden. Es iſt klar, daſs die 3 Bogen $\overset{\frown}{DA}$, $\overset{\frown}{DB}$, $\overset{\frown}{DC}$, die von dem Punkte *D* ausgehen, durch die Berührungspunkte *a*, *b*, *c*, des geſuchten Kreiſes und der 3 gegebenen, durchgehen werden.

Nun wollen wir die Bogen $\widehat{Aa}$, $\widehat{Bb}$, $\widehat{Cc}$, respect. a, b, c, nennen, und $\widehat{Da} = \widehat{Db} = \widehat{Dc} = x$

Es sey noch

$$\widehat{AB} = m$$
$$\widehat{AC} = n$$
$$\widehat{BD} = p$$
$$\widehat{CD} = q$$
$$\widehat{AD} = r$$
$$\widehat{BC} = s$$

Wir haben also (346.) folgende Formel:

$$1 - (\cos m^2 + \cos n^2 + \cos p^2 + \cos q^2 + \cos r^2 + \cos s^2) + \ldots .$$

Es ist aber offenbar

$$r = a + x$$
$$p = b + x$$
$$q = c + x$$

Substituirt man diese Werthe in der vorigen Gleichung, so kommt eine, die nur x und bekannte Grössen enthält.

Sieben und funfzigste Aufgabe.

357. Vier Kugeln sind im Raume gegeben, eine 5te Kugel zu finden, die die 3 andern berühre.

Es seyen (Fig. 148.) A, B, C, D die Mittelpunkte der 4 gegebenen Kugeln, a, b, c, d ihre Halbmesser, E der Mittelpunkt der gesuchten Kugel, R ihr Halbmesser, m, n, p, q, r, s die 6 bekannten Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$; m', n', p', q', r', s' die 6 unbekannten Winkel $A\hat{E}B$, $A\hat{E}C$, u. s. w.

die ihren Scheitel in E haben und auf den Linien m, n, p, q, r, s ſtehen, ſo haben wir

$$cof\, m' = \frac{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2}{2\,\overline{AE}\,.\,\overline{BE}}$$

Weil nun $\overline{AB} = m$ und

$$\overline{AE} = a + R$$
$$\overline{BE} = b + R$$

ſo haben wir

$$cof\, m' = \frac{(a+R)^2 + (b+R)^2 - mm}{2(a+R)\,(b+R)}$$

und eben ſo

$$cof\, n' = \frac{(a+R)^2 + (c+R)^2 - nn}{2(a+R)\,(c+R)}$$

$$cof\, p' = \frac{(b+R)^2 + (d+R)^2 - pp}{2(b+R)\,(d+R)}$$

$$cof\, q' = \frac{(c+R)^2 + (d+R)^2 - qq}{2(c+R)\,(d+R)}$$

$$cof\, r' = \frac{(a+R)^2 + (d+R)^2 - rr}{2(a+R)\,(d+R)}$$

$$cof\, s' = \frac{(b+R)^2 + (c+R)^2 - ss}{2(b+R)\,(c+R)}$$

Zwiſchen den 6 Winkeln m', n', p', q', r', s' hat man (346.) die Bedingungsgleichung

$$1 + (cof\, m'^2 + cof\, n'^2 + \ldots) + \text{u. ſ. w.}$$

ſetzt man in dieſe Gleichung die eben gefundenen Werthe für $cof\, m'$, $cof\, n'$, $cof\, p'$ u. ſ. w. ſo erhalten wir eine Gleichung, in der R die einzige Unbekannte iſt, und die, wie ich glaube, nur quadratiſch ſeyn wird; da aber die Rechnung ſehr langwie-

rig ist, obgleich ohne sonstige Schwierigkeit, so begnüge ich mich sie anzudeuten.

Acht und funfzigste Aufgabe.

358. Die allgemeine Aufgabe der sphärischen Tetragonometrie zu lösen, d. h. in allen Fällen ein Viereck, das aus gröfsten Kreisen einer Kugel besteht, zu lösen.

Die Aufgabe wird auf die Bildung einer allgemeinen Tafel der Theile des sphärischen Vierecks reducirt, alle nur in Werthen, so vieler anderer ausgedrückt, dafs dadurch der Rest bestimmt sey.

Da die Auflösung der (337.) für das gradlinigte Viereck vorgetragenen ganz ähnlich ist, so übergehen wir sie hier. Eben so kann man die Methode (338.) befolgen, um sphärische Vielecke (aus Bogen gröfster Kreise zusammengesetzt) aufzulösen.

Neun und funfzigste Aufgabe.

359. Wenn von den 10 Linien, die 5 Punkte im Raume zu zweyen verbunden, 9 gegeben sind, die 10te zu finden.

A, *B*, *C*, *D*, *E* (Fig. 149.) seyen die 5 Punkte im Raume, und die 10 Linien

$\overline{AB} = m$	$\overline{CD} = q$
$\overline{AC} = n$	$\overline{AE} = u$
$\overline{AD} = r$	$\overline{BE} = w$
$\overline{BC} = s$	$\overline{CE} = y$
$\overline{BD} = p$	$\overline{DE} = z$

Um eine Gleichung zu finden, betrachte ich z. B. die 6 Winkel, die ihren gemeinſchaftlichen Scheitelpunkt in E haben, und die auf den 6 Linien, m, n, p, q, r, s ſtehen. Ich nenne ſie reſpective m', n', p', q', r', s'. So habe ich (346.) unter dem Coſinus dieſer Winkel die Gleichung

$$1 - (cof\, m'^2 + cof\, n'^2 + cof\, p'^2 + \ldots) + \ldots$$

In dieſe Gleichung ſetze ich für jeden Coſinus ſeinen Werth zu m, n, p, u. ſ. w. wozu ich folgende Gleichungen habe:

$$cof\, m' = \frac{xx + uu - mm}{2xu}$$

$$cof\, n' = \frac{uu + yy - nn}{2uf}$$

$$cof\, p' = \frac{xx + zz - pp}{2xz}$$

$$cof\, q' = \frac{yy + zz - qq}{2yz}$$

$$cof\, r' = \frac{uu + zz - rr}{2uz}$$

$$cof\, s' = \frac{xx + yy - ss}{2xy}$$

Die Gleichung, die aus dieſer Subſtitution hervorgeht, enthält keine Wurzelgröſsen, und wird immer nach Art des quadratiſchen aufgelöſet werden können, da ſie ſymmetriſch iſt, und ſie z. B. für einen Fall, z. B. für x, ſo aufgelöſet werden kann. Man wird in dieſem Falle, wenn alles andere gegeben iſt, leicht die Punkte B, E mit dem Lineal und Zirkel finden können, alſo muſs auch die Gleichung

durch eine Folge quadratiſcher aufgelöſst werden können.

Sechszigſte Aufgabe.

360. Das Polyeder in allen Fällen aufzulöſen.

Iſt die Zahl der körperlichen Winkel $= n$, ſo muſs man, um den Reſt beſtimmen zu können, $3(n-2)$ unabhängige Stücke kennen. Dieſs iſt alſo die Zahl derjenigen Quantitäten, die man als Maaſsſtäbe zur Vergleichung brauchen muſs, und durch die in der zu bildenden Tafel die andern ausgedrückt werden.

Es ſeyen A, B, C, D, E, F, (Fig. 150.) die Scheitel des gegebenen Polyeders. Ich nehme die 3 Seiten des Dreyecks ABC, und die Entfernungen $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ u. ſ. w. aller andern Winkel von A, B, C als Mittel, die übrigen auszudrücken, wo ich, wie gehörig, $3(n-2)$ Gegebene erhalte.

Betrachten wir nun dieſe Punkte zu Fünfen genommen, ſo haben wir die Syſteme

A, B, C, D, E
A, B, C, D, F
A, B, C, E, F

In jedem dieſer Syſteme iſt nach der Annahme nur eine einzige Unbekannte: im erſten die Linie $\overline{DE}$; im zweyten, $\overline{DF}$; im dritten $\overline{EF}$. Wir haben alſo nach der Aufgabe (331.) ſucceſſive jede dieſer unbekannten Linien.

Wir müſſen jetzt die Winkel aufſuchen, die zweyerley Art ſind, nehmlich durch dieſe Linien un-

ter einander, und durch die Ebenen gebildet, die dieſe Linien zu zweyen enthalten.

Da nun aber die Figur in Dreyecke aufgelöſt iſt, ſo finden ſich die Winkel aus den Seiten ſehr leicht, ſo z. B.

$$cof\, A\hat{E}C = \frac{\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 - \overline{AC}^2}{2\,\overline{AE}\,.\,\overline{CE}}$$

Die Winkel der Ebenen giebt die ſphäriſche Trigonometrie, ſo z. B. in der Pyramide $ABCE$ iſt der Winkel am Scheitel E, durch die beyden Seitenflächen $\overline{\overline{EAB}}$, $\overline{\overline{EBC}}$ gebildet, durch folgende Gleichung gegeben

$$cof\, \overline{\overline{EAB}}\hat{}\overline{\overline{EBC}} = \frac{cof\, A\hat{E}C - cof\, A\hat{E}B\,.\,cof\, B\hat{E}C}{ſin\, A\hat{E}B\,.\,ſin\, B\hat{E}C}$$

361. Sind die Punkte A, B, C, D, E, u. ſ. w. in einer Ebene, ſo wird das Polyeder ein Polygon. Man kann alſo dieſe Aufgabe als die allgemeine Aufgabe der Geometrie der graden Linien und Ebenen betrachten.

362. Die in dieſem Werke aus einander geſetzte Bildung der Tafeln, kann eben ſowohl auf die analytiſche Geometrie, als auf die Trigonometrie angewandt werden. Z. B. um die Eigenſchaften der Pyramide aufzuſuchen, nenne man die Coordinaten der 4 Scheitelpunkte

x, y, z
x', y', z'
x'', y'', z''
x''', y''', z'''

und drücke alle Linien und Flächen in ihren Werthen aus. Die Pyramide wird hier durch 12 Stücke

bestimmt, da nur 6 nöthig sind. Aber man muss sich erinnern, dass unter den 12, 6 willkührliche sind, die dazu dienten, die Lage der 3 senkrechten Ebenen zu bestimmen. Gewöhnlich verschwinden diese willkührlichen Quantitäten als gemeinschaftliche Factoren bey der Rechnung, aber mitunter kann man auch die Rechnung sehr vereinfachen, wenn man ihnen für den behandelten Gegenstand passende Werthe beylegt.

Ich wiederhole noch einmal meine Überzeugung, dass die hier vorgetragene Theorie, gewiss mit dem grössten Nutzen, auf alle Theile der mathematischen und physiko-mathematischen Wissenschaften anzuwenden wäre.

Sechster Abſchnitt.

Beſtimmung eines Punktes im Raume, und Veränderung ſeiner Coordinaten.

363. Jede Curve kann man als die Bahn eines Punktes betrachten, der nach irgend einem Geſetze im Raume bewegt wird. Den Ausdruck dieſes Geſetzes, oder die Bedingungen dieſer Bewegung nennt man die Gleichung der Curve. Der Zweck der Gleichung iſt, die Curve auf andere bekannte und feſte Gegenſtände zu beziehen, die man als Mittel zur Vergleichung braucht. So muſs, nachdem man dieſe Gegenſtände wählt, die Gleichung andere Formen bekommen.

Da die einfachſten Gegenſtände, die wir kennen, und die wir behandeln können, Punkte, Grade, Linien, Ebenen ſind, ſo brauchen wir ſie gewöhnlich als Mittel zur Vergleichung, und beziehen auf ſie in jedem Augenblicke die Lage des beweglichen Punktes, der die Curve beſchreibt. Die Entfernungen dieſer feſten Gegenſtände und alle ihre Functionen hei-

ſen Conſtanten, aber die Entfernungen des beweglichen Punktes von den feſten Gegenſtänden und die Functionen, worin dieſe entriren, heiſsen Veränderliche.

Eins der einfachſten Mittel, um eine in einer Ebene beſchriebene Curve auf feſte Gegenſtände zu beziehen, iſt, willkührlich in dieſer Ebene 2 gewöhnlich rechtwinklichte Axen zu ziehen, und die Relation aufzuſuchen, die vermöge der Geſetze, nach denen ſich der beſchreibende Punkt bewegt, beſtändig zwiſchen den Entfernungen dieſes Punktes von den beyden Axen beſtehen muſs. Doch braucht man auch zwey feſte Punkte, oder einen und eine feſte Linie, oder wiederum einen feſten Punkt, und den Winkel an dieſem Punkte mit einer feſten Linie u. ſ. w. Man ſieht leicht, wie viele Arten es giebt, die Natur der Curve durch eine Gleichung zwiſchen zwey Veränderlichen auszudrücken, die man überhaupt Coordinaten nennt. Um die Natur der Curve aus verſchiedenen Geſichtspunkten zu betrachten, beſchränkt man ſich nicht auf eine Art, ſondern nimmt nach und nach verſchiedene Mittel zur Vergleichung, und ſucht für jedes Syſtem die Gleichung der Curve, das nennt man nun das Syſtem der Coordinaten verändern.

364. Die Kunſt, die Eigenſchaften der Curven zu finden, iſt eigentlich die Kunſt das Syſtem der Coordinaten zu verändern; wenn man ſie in dem eben angeführten allgemeinen Sinne nimmt. Denn dadurch nimmt die Gleichung, die ihre Natur ausdrückt, ſo viele verſchiedene Formen an, als man Veränderun-

gen macht, und jede dieſer Formen iſt eine neue Art, dieſe Curve mit den feſten Gegenſtänden zu vergleichen, die man nach der Reihe als Mittel zur Vergleichung braucht.

Jede der Gleichungen, die man ſo erhält, zeigt durch ihre Form die Eigenſchaften der Curve, die Differentialrechnung nachher, unter welcher Geſtalt man ſie auch anwendet, die Tangenten, Normalen, Krümmungshalbmeſſer u. ſ. w. und alle dieſe neuen Gröſsen, die ſich ſtufenweiſe mit dem beſchreibenden Punkte verändern, ſind eben ſo viel Veränderliche, von denen man zwey als Coordinaten annehmen kann.

Nimmt man, ohne die Gleichung für die Curve zu kennen, zwey ſich entſprechende von dieſen Veränderlichen als Coordinaten bey irgend einer Lage des beſchreibenden Punktes an, ſo iſt es leicht, die andern dem Punkte entſprechenden Veränderlichen in Werthen von dieſen auszudrücken, und bildet man ſo eine Tafel, ſo iſt es leicht, wenn die Gleichung für die Curve gefunden iſt, beliebig das Syſtem der Coordinaten zu verändern.

365. Die Unvollkommenheit der Analyſe erlaubt nicht immer jede Veränderliche in den Werthen der gewählten Coordinaten auszudrücken. Man muſs ſich dann mit einer unaufgelöſten Gleichung, zwiſchen den beyden Coordinaten, die man als Mittel zur Vergleichung braucht, und der Veränderlichen, die man in die Tafel bringen wollte, oft ſogar mit einer Differentialgleichung zwiſchen dieſen 3 Veränderlichen behelfen.

366. Iſt nun die allgemeine Tafel gebildet, ſo gehört ſie ohne Unterſchied allen Curven an, weil ſie gebildet ward, ehe man die Gleichung derjenigen, die man unterſuchen will, kannte. Um ſie auf irgend eine Curve anzuwenden, muſs man aus ihrer Gleichung irgend eine der Veränderlichen in Werthen der andern, und der Conſtanten ziehen. Dann giebt die Tafel alle Veränderliche zu Werthen einer einzigen ausgedrückt, und man kann ſie leicht zu zweyen vergleichen.

367. Es ſey (Fig. 152.) irgend eine Curve, M der bewegliche Punkt, der ſie beſchreibt, wir wollen willkührlich in der Ebene dieſer Curve einen Punkt A als Urſprung der Coordinaten annehmen, eine Linie $\overline{AB}$ als Abſciſſenaxe ziehen, und von M auf $\overline{AB}$ das Perpendikel $\overline{MP}$ ſenken, ſo iſt $\overline{AP}$ ſeine Abſciſſe, MP ſeine Ordinate, und wir haben zwey Veränderliche, deren Verhältniſs, algebraiſch angegeben, die Natur der Curve ausdrücken kann.

368. Jetzt wollen wir uns durch den Punkt M eine Tangente vorſtellen. Dieſe Tangente, die demſelben Punkte entſprechende Subtangente, Normale, der Krümmungshalbmeſſer, ſind eben ſo viel Veränderliche, die zu zweyen, ſtatt der Abſciſſe und Ordinate, als Coordinaten genommen werden könnten. Denn die Natur der Curve iſt eben ſo gut durch die Gleichung zwiſchen der Normale und dem Krümmungshalbmeſſer beſtimmt, als durch die zwiſchen Abſciſſe und Ordinate.

369. Ziehen wir durch den feſten Punkt A den Radius Vector $\overline{AM}$, ſo ſind dieſer Radius Vector, und

der

der Winkel $M\hat{A}B$ neue Veränderliche, die man auch als Coordinaten brauchen könnte.

370. Nehmen wir noch willkührlich auf $\overline{AB}$, einen zweyten festen Punkt B, und ziehen $\overline{BM}$, so sind die Winkel, $M\hat{B}A$, $P\hat{M}B$, $A\hat{M}B$, die Linie $\overline{PB}$, die Räume $\overline{\overline{AMP}}$, $\overline{\overline{BMP}}$, $\overline{\overline{AMB}}$ eben so viel neue dem Punkte M entsprechende Veränderliche.

371. Legt man durch die Punkte A, B, M, einen Kreis, verlängert MP bis an den Umfang dieses Kreises nach H, zieht die beyden Linien $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, und die Perpendikel $\overline{AG}$, $\overline{BF}$ auf $\overline{MB}$, MA, die sich in D, einem Punkte der Ordinate $\overline{MP}$, schneiden, zieht man von M den Durchmesser $\overline{MH'}$, und eine Linie $\overline{MH''}$, die den Winkel $A\hat{M}B$ in zwey gleiche Theile theilt, führt man dieselben Constructionen bey den Winkeln A, B, H, u. s. w. aus, so sind die daraus entstandenen Winkel, Linien, Segmente, eben so viele Veränderliche, die dem Punkte M entsprechen, und aus denen man zu zweyen Gleichungen bilden kann, welche die Natur der Curve eben so wohl ausdrücken, als die Gleichung zwischen der Abscisse und der Ordinate.

372. Eine jede solche Gleichung (obgleich sie implicite alle gleich sind) kann sich von den andern durch die Form so sehr unterscheiden, dass man die Identität schwerlich erkennen würde. In diesem Falle drückt sie das aus, was man die verschiedenen Eigenschaften der Curve nennt.

Eine der ersten Aufgaben, die sich hier darbieten, ist die folgende sehr bekannte, von der ich nur in so

weit handeln werde, um daraus einige neue Folgen ableiten zu können.

Ein und sechszigste Aufgabe.

373. Wenn eine Curve auf zwey feste Axen durch eine Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten, die diesen Axen parallel sind, bezogen ist, dies Coordinatensystem so zu verändern, dass die neue Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten statt finde, die zwey neuen gegebenen Axen parallel sind.

Es sey M (Fig. 153.) der beschreibende Punkt, A der Ursprung der neuen Coordinaten, $\overline{AP}$ die Abscisse, $\overline{MP}$ die Ordinate, a der Ursprung der neuen Coordinaten, $\overline{ap}$ die neue Abscisse, $\overline{Mp}$ die neue Ordinate.

Ich verlängere die beyden Abscissenaxen $\overline{AP}$, $\overline{ap}$, bis sie sich in Q schneiden, und die Ordinaten, $\overline{MP}$, $\overline{Mp}$, bis sie auch die Abscissenaxen in R, r schneiden.

Nun hängen $\overline{AP}$, $\overline{MP}$, $\overline{ap}$, $\overline{Mp}$ vom beschreibenden Punkte M ab, und sind folglich Veränderliche, hingegen die Richtungen der 4 Axen stehen in keinem Zusammenhange mit M, und sind also constant.

Folglich sind die 4 Winkel des Vierecks $MPQp$ alle constant, so wie die Winkel MRQ, $M\hat{Q}$. Ebendaher, weil die Lagen der Punkte A, a unabhängig von der Lage des Punktes M sind, so sind auch $\overline{AQ}$, $\overline{aQ}$ constant. Wir benennen also

$\overline{AP} = X$
$\overline{MP} = Y$
$\overline{ap} = x$
$\overline{Mp} = y$
$\overline{AQ} = A$
$\overline{aQ} = a$
$M\hat{P}Q = P$
$M\hat{p}Q = p$
$M\hat{R}Q = R$
$M\hat{r}Q = r$
$P\hat{Q}p = q$

Das Viereck $MPQp$ giebt uns die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A - X &= Y \,.\, cof\, P + y\, cof\, r + (x-a)\, cof\, q \\ x - a &= y \,.\, cof\, p + Y\, cof\, R + (A-X)\, cof\, q \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Ziehen wir daraus die Werthe von X, Y, durch x, y und Conſtante ausgedrückt, ſo werden ſie von der Form

$$X = fx + gy + h$$
$$Y = f'x + g'y + h'$$

ſeyn, wo f, f', g, g', h, h' Conſtanten ſind, die man leicht durch obige Rechnung beſtimmen kann.

Da beyde Endgleichungen für X, Y, nur vom erſten Grade ſind, ſo iſt es augenſcheinlich, daſs die umgeformte Gleichung auf keinen höheren Grad als die gegebene ſteigen wird.

Sind von den conſtanten Winkeln P, p, R, r 3 gegeben, ſo folgt der 4te unmittelbar aus der Gleichung

$$P - R = p - r$$

Vermittelſt dieſer Bedingungsgleichung, kann man aus den Formeln (A) jeden beliebigen Winkel eliminiren.

374. Wenn die Gleichung zwiſchen den Coordinaten x, y vom $m$ten Grade iſt, ſo kann man ſie offenbar unter dieſe Form bringen:

$$Fx^m + Gy^m + Z + K = o$$

wo F, G, Conſtanten ſind, Z das Aggregat aller Theile, in denen x, oder y in einer niedrigeren Potenz vorkommen, und K das conſtante Glied iſt.

Für $x = o$ verſchwindet das erſte Glied, ſo wie alle Glieder in Z, in denen x vorkommt. Die Gleichung enthält alſo keine andere Unbekannte mehr als y, und kann unter dieſe Form gebracht werden:

$$y^m + \frac{Z'}{G} + \frac{K}{G} = o$$

der abſolute Werth des Productes aller Ordinaten, die dem Punkte gehören, wo $x = o$ iſt,
alſo

$$= \frac{K}{G}$$

Eben ſo zeigt man, daſs für $y = o$ der abſolute Werth des Productes der Abſciſſen

$$= \frac{K}{F}$$

ſey. Bezeichnen wir alſo das Product der Abſciſſen mit (x), das der Ordinaten mit (y), ſo iſt für den Anfangspunkt der Coordinaten

$$(y) : (x) = F : G$$

375. Wir wollen nun annehmen, daſs, ohne die Richtung der Axen zu verändern, man nur einen an-

dern Anfangspunkt in der Ebene wählt, in der die Curve gezogen ist, indem man nur in der Gleichung für x, $x' + s$, für y, $y' + t$ substituirt, wo s und t Constanten sind. Durch diese Substitution in der Gleichung

$$Fx^m + Gy^m + Z + K = 0$$

wird sie

$$Fx'^m + Gy'^m + Z' + K' = 0$$

an der sich nur Z, und K verändern konnten. Aus dieser Gleichung folgt eben so wie vorhin, dass

$$(y) : (x) = F : G$$

Dies Verhältniss wird also nicht dadurch geändert, wenn nur die Richtungen der Axen sich nicht verändern, d. h. immer ihrer ersten Lage parallel bleiben.

376. Wir wollen jetzt in der Ebene einer Curve eine beliebige Abscissenaxe $\overline{AA'}$ und verschiedene unter einander parallele Ordinaten ziehn, die die Abscissenaxe unter einem beliebigen Winkel schneiden. Natürliche dem Punkte P entsprechende Abscissen sollen die Segmente $\overline{aP}$, $\overline{a'P}$, $\overline{a''P}$ heissen, die auf dieser Axe von der Curve und der Ordinate begränzt werden. Hingegen die eigentlichen den Punkten P, p entsprechenden Abscissen sind $\overline{AP}$, $\overline{Ap}$, wo A, der Ursprung der Coordinaten, willkührlich angenommen ist. Dies angenommen, so kann man den bewiesenen Satz so ausdrücken:

In jeder geometrischen Curve verhalten sich die Producte der natürlichen Abscissen, wie die Producte der correspondirenden Ordinaten.

377. Da dieſelben Schlüſſe auf jede krumme Oberfläche angewandt werden können, ſo dürfen wir daraus ſchlieſsen:

Wenn man irgend eine geometriſche krumme Oberfläche hat, und willkührlich im Raume zwey Punkte A, B annimmt, durch dieſe Punkte, zwey Paare unter ſich paralleler graden Linien zieht, ſo ſind die Producte der Segmente, die zwiſchen den Punkten A und B, durch die krumme Oberfläche auf den erſten beyden Linien abgeſchnitten werden, in demſelben Verhältniſſe wie die Producte der eben ſo auf den andern beyden Linien beſtimmten Segmente.

Denn wenn man durch die Punkte A und B eine neue grade Linie zieht, ſo verhalten ſich die Producte der Segmente dieſer Linie zwiſchen der krummen Oberfläche und den Punkten A und B ſowohl, wie die erſten als die andern vorher erwähnten Producte.

378. Es ſey (Fig. 155.) irgend eine geometriſche Curve in einer Ebene beſchrieben. Wir wollen in dieſer Ebene willkührlich 3 Punkte A, B, C, annehmen, und ſie zu zweyen, durch unbeſtimmt verlängerte Linien verbinden.

Nun ſey

($A'B'$) das Product der Segmente auf $\overline{AB}$, zwiſchen dem Punkte A und den verſchiedenen Armen der Curve;

$(B'A')$ das Product der Segmente auf derſelben Linie zwiſchen B, und den verſchiedenen Armen der Curve;

$(A'C')$ das Product der Segmente auf $\overline{AC}$ zwiſchen dem Punkte A und den Armen der Curve;

$(C'A')$ das Product der Segmente auf $\overline{AC}$ zwiſchen C und den Armen der Curve;

$(B'C')$ das Product der Segmente auf $\overline{BC}$ zwiſchen B und den Armen der Curve;

$(C'B')$ das Product der Segmente auf $\overline{BC}$ zwiſchen C und den Armen der Curve;

ſo hat man

$$(A'B')\,(B'C')\,(C'A') = (B'A')\,(C'B')\,(A'C')$$

Um es zu beweiſen, wollen wir durch den Winkel A zum Beyſpiel die Transverſale $\overline{AK}$ parallel mit $\overline{BC}$ ziehen, und das Product der Segmente auf $\overline{AK}$ zwiſchen A und den Armen der Curve $(A'K')$ nennen. Dann haben wir (375.)

$$(A'B') : (B'A') = (A'K') : (B'C')$$
$$(C'A') : (A'C') = (C'B') : (A'K')$$

woraus unmittelbar der Satz folgt.

Das Reſultat, zu dem wir ſchon (235.) kamen, hat das Merkwürdige, daſs es bey den Punkten und Linien, auf die man die Curve bezieht, nichts Feſtes vorausſetzt, und daſs alſo die Gleichung der Curve, ſo ausgedrückt, keine willkührliche Gröſse enthält, ſondern blos die Parameter, die die Geſtalt, aber nicht die abſolute Lage der Curve im Raume beſtimmen. Eben ſo iſt es mit dem folgenden Lehrſatze.

Acht und dreyſsigſter Lehrſatz.

379. Zieht man in der Ebene einer geometriſchen Curve ein beliebiges Vieleck $ABCDE$ (Fig. 156.), verlängert ſeine Seiten unbeſtimmt und behält die Bezeichnung im vorigen Paragraphen, ſo iſt

$$(A'B')\,(B'C')\,(C'D')\,(D'E')\,(E'A') = (B'A')\,(C'B')\,(D'C')\,(E'D')\,(A'E').$$

Zieht man die Diagonalen $\overline{AC}$. $\overline{AD}$, ſo hat man

$$(A'B')\,(B'C')\,(C'A') = (B'A')\,(C'B')\,(A'C')$$
$$(A'C')\,(C'D')\,(D'A') = (C'A')\,(D'C')\,(A'D')$$
$$(A'D')\,(D'E')\,(E'A') = (D'A')\,(E'D')\,(A'E')$$

Aus der Multiplication dieſer Gleichungen entſpringt die Formel des Lehrſatzes.

380. Eben die Betrachtungen finden für eine krumme geometriſche Oberfläche ſtatt, wie auch das eingeſchriebene Vieleck beſchaffen iſt. Wir haben alſo folgenden Satz.

Neun und dreyſsigſter Lehrſatz.

Wenn eine beliebige geometriſche krumme Oberfläche gegeben iſt, und man im Raume irgend ein Vieleck $ABCDE$ beſchreibt, die Seiten unbeſtimmt verlängert, und durch $(A'B')$ das Product der Segmente auf $\overline{AB}$ zwiſchen A und den verſchiedenen Gegenden der krummen Oberfläche bezeichnet u. ſ. w., ſo iſt

$(A'B')\,(B'C')\,(C'D')\,(D'E')\,(E'A') = (B'A')\,(C'B')\,(D'C')\,(E'D')\,(A'E')$

381. Werden alle oder einige Seiten des Vielecks Tangenten, so sind die Segmente auf solchen Seiten, zu zweyen genommen, gleich. Es sey z. B. *fghik* (Fig. 157.) ein Kegelschnitt, der in einem beliebigen Vieleck beschrieben ist, so dass f, g, h, i, k, die Berührungspunkte sind, so hat man

$$(A'B') = \overline{Af}^2$$
$$(B'A') = \overline{Bf}^2$$
$$(B'C') = \overline{Bg}^2$$
$$(C'B') = \overline{Cg}^2$$

u. s. w.

Die Gleichung verwandelt sich also in

$$\overline{Af}.\overline{Bg}.\overline{Ch}.\overline{Di}.\overline{Ek} = \overline{Ak}.\overline{Ei}.\overline{Dh}.\overline{Cg}.\overline{Bf}.$$

382. Eben das hat offenbar für die Tangenten eines Körpers statt, der durch Umdrehung eines Kegelschnittes entstand, mag das Vieleck, das aus ihrer Verbindung entsteht, in einer Ebene liegen oder nicht.

383. Ist der Kegelschnitt in einem Dreyecke beschrieben (Fig. 158.) und zieht man aus jedem Winkel A, B, C dieses Dreyecks, eine Linie nach dem gegenüberstehenden Berührungspunkt, so hat man

$$\overline{Af}\,.\,\overline{Bh}\,.\,\overline{Cg} = \overline{Ag}\,.\,\overline{Bf}\,.\,\overline{Ch}$$

Also schneiden sich diese 3 Transversalen in einem Punkte D (224.), wie wir schon (237.) bewiesen haben. Man kann folglich auf die Kegelschnitte die zahlreichen Eigenschaften der vollständigen Vierecke anwenden.

Z. B. zieht man $\overline{fg}$ und nimmt an, daſs dieſe Linie, $\overline{Ah}$ im Punkte H ſchneide, ſo hat man (225.)

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{Ah}}{\overline{Dh}}$$

verlängert man $\overline{gf}$, bis ſie $\overline{BC}$ in l trifft, ſo iſt

$$\frac{\overline{Bl}}{\overline{Cl}} = \frac{\overline{Bh}}{\overline{Ch}}$$

Zwey und ſechszigſte Aufgabe.

384. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen der Abſciſſe $\overline{AP}$ oder $\overline{Mp}$ (Fig. 159.) und der Ordinate $\overline{MP}$ oder $\overline{Ap}$ gegeben, zweyen gegebenen Axen $\overline{AP}$, $\overline{Ap}$ parallel; das Syſtem der Coordinaten zu verändern, indem man als neue Coordinaten die beyden Segmente $\overline{MQ}$, Mq annimmt, die durch den beſchreibenden Punkt M, auf einer Transverſale $\overline{Qq}$ gebildet werden, die unter einem beſtändigen Winkel $A\hat{Q}q$, zwiſchen den gegebenen Axen $\overline{AP}$, $\overline{Ap}$ gezogen iſt.

Es ſey

$$\overline{AP} = x$$
$$\overline{MP} = y$$
$$\overline{MQ} = u$$
$$\overline{Mq} = v$$
$$P\hat{A}p = a$$
$$A\hat{Q}q = Q$$
$$A\hat{q}Q = q$$

Man ſoll die Natur der Curve durch eine Gleichung zwiſchen u, v ſtatt einer zwiſchen x, y ausdrücken.

Wir haben

$$y : u = \sin Q : \sin a$$

alſo

$$y \cdot \sin a = u \cdot \sin Q$$

eben ſo

$$v \cdot \sin q = x \cdot \sin a$$

und daher

$$x = \frac{v \cdot \sin q}{\sin a}$$

$$y = \frac{u \cdot \sin Q}{\sin a}$$

man braucht alſo nur dieſe Werthe von x, y in die Gleichung zu ſetzen.

Durch dieſe Umformung wird, wie man leicht ſieht, der Grad der Gleichung nicht geändert.

Man könnte auch als Coordinaten $\overline{QM}$, $\overline{Qq}$ annehmen. Wir wollen dieſe neue Coordinate $\overline{Qq} = z$ ſetzen, ſo iſt

$$z = u + v$$

oder

$$v = z - u$$

alſo

$$x = (z - u)\frac{\sin q}{\sin a}$$

$$y = u \cdot \frac{\sin Q}{\sin a}$$

Dieſe Art die Curven zu betrachten, indem man ſie auf 2 feſte Axen bezieht, und die Coordinaten,

auf derſelben ſich immer parallelen Transverſale nimmt, die zwiſchen dieſen beyden Axen liegt, kann in mehreren Fällen vortheilhaft ſeyn, weil man, ſtatt eines Vierecks, nur ein Dreyeck zu betrachten braucht, und mit Leichtigkeit die Trigonometrie auf die Curven anwenden kann. Ein Beyſpiel iſt die gewöhnliche Hyperbel auf ihre Aſymptoten bezogen.

Drey und ſechszigſte Aufgabe.

385. Eine Curve iſt auf 2 feſte Axen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ (Fig. 160.) bezogen durch dieſen Axen parallele Coordinaten. Man nehme willkührlich auf dieſen Axen, 2 feſte Punkte B, C und ziehe von ihnen durch den beſchreibenden Punkt M, zwey grade Linien $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ die die Axen $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ in G und F ſchneiden. Dieſs feſtgeſetzt ſoll das Syſtem der erſten Coordinaten verändert werden, ſo daſs wir $\overline{AF}$, $\overline{AG}$ als neue Coordinaten erhalten.

Wir wollen $\overline{Mp}$ parallel mit $\overline{AB}$ ziehen; $\overline{Mq}$ mit $\overline{AC}$: Ap oder $\overline{Mq}$ wird die Abſciſſe, und $\overline{Aq}$ oder $\overline{Mp}$ die Ordinate im erſten Coordinatenſyſtem ſeyn.

Es ſey alſo

$$\overline{Ap} = x$$
$$\overline{Mp} = y$$
$$\overline{AF} = u$$
$$\overline{AG} = v$$
$$\overline{AB} = b$$
$$\overline{AC} = c$$

ſo haben wir

$$x : b - y = v : b$$

alſo

$$bx = bv - vy$$

eben ſo

$$cy = cu - ux$$

alſo

$$x = \frac{bcv - cuv}{bc - uv}$$

$$y = \frac{bcu - buv}{bc - uv}$$

welche Werthe man nur für x, y in die Gleichung der Curve zu ſetzen braucht.

Nimmt man

$$\overline{BF} = t$$

$$\overline{CG} = z$$

als Coordinaten, ſo hat man

$$u = b - t$$

$$v = c - z$$

alſo

$$x = \frac{cct - ctz}{ct + bz - tz}$$

$$y = \frac{bbz - btz}{bz + ct - tz}$$

Vier und ſechszigſte Aufgabe.

386. Wenn eine Curve in einer Ebene beſchrieben iſt, ſo wollen wir willkührlich 3 feſte Punkte A, B, C in dieſer Ebene annehmen, und dieſe zu zweyen verbinden, um das Dreyeck ABC zu bilden (Fig.

160.), dann von dem beſchreibenden Punkte M zu jedem Winkel des Dreyecks eine Transverſale ziehen, bis ſie die gegenüberſtehende Seite ſchneidet. Iſt nun die Natur der Curve durch eine Gleichung, zwiſchen den Entfernungen $\overline{AF}$, $\overline{AG}$ des einen Winkels von den Punkten F, G ausgedrückt (welches die Durchſchnittspunkte der anliegenden Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, mit den Transverſalen CF, $\overline{BG}$ ſind), ſo ſoll man dieſs Coordinatenſyſtem verändern, indem man als neue Coordinaten die Entfernungen $\overline{BF}$, $\overline{BH}$ eines der andern Winkel von den Punkten F, H, einführt.

Wir haben offenbar die 3 Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \overline{AF} &= \overline{AB} - \overline{BF} \\ \overline{CG} &= \overline{AC} - \overline{AG} \\ \overline{CH} &= \overline{BC} - \overline{BH} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

dann auch (224.)

$$\overline{AF}.\overline{BH}.CG = \overline{AG}.\overline{BF}.\overline{CH} \ldots (B)$$

alſo durch Subſtitution aus den erſten

$$(\overline{AB} - \overline{BF})\,(\overline{AC} - \overline{AG})\,.\,\overline{BH} = \overline{AG}\,.\,\overline{BF}\,(\overline{BC} - \overline{BH}) \ldots (C)$$

aus dieſer und der erſten von den Gleichungen (A) zieht man, wie es verlangt ward,

$$\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF}$$

$$\overline{AG} = \frac{(\overline{AB} - \overline{BF}).\overline{BH}.\overline{AC}}{\overline{AB}\,.\,\overline{BH} - \overline{BC}.\overline{BF}}$$

Fünf und ſechszigſte Aufgabe.

387. Ein Dreyeck ABC (Fig. 161.) iſt gegeben. Wir wollen uns eine Curve BMC vorſtellen, ſo daſs, wenn man ein Perpendikel $\overline{MP}$ auf die Seite BC des gegebenen Dreyecks fallen läſst, und dieſs Perpendikel verlängert, bis es die beyden andern Seiten in p und q ſchneidet, $\overline{MP}$ eine mittlere Proportionallinie zwiſchen $\overline{Mq}$ und $\overline{Mr}$ ſey. Man verlangt die Gleichung dieſer Curve, indem man ſie auf $\overline{BC}$ als Abſciſſenaxe bezieht, und B als Urſprung der Coordinaten annimmt.

Die Coordinaten, zwiſchen denen die urſprüngliche Gleichung der Curve beſteht, ſind $\overline{MP}$ und $\overline{Mq} \cdot \overline{Mr}$ oder allgemeiner $A \cdot \overline{Mq} \cdot \overline{Mr}$, wo A eine Conſtante iſt und man das Product $\overline{Mq} \cdot \overline{Mr}$ als eine einzige Veränderliche betrachtet. Man ſoll dieſs Syſtem verändern und dafür ein Syſtem ſetzen, in dem $\overline{BP}$, $\overline{MP}$ die Veränderlichen ſind, von denen $\overline{MP}$ beyden Syſtemen gleich iſt.

Ich bemerke, daſs die Curve, wie ſie auch beſchaffen ſeyn mag, nothwendigerweiſe in den Punkten B, C, die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ des Dreyecks zu Tangenten hat, denn in dem Punkte, wo die Curve $\overline{AB}$ trifft, wird

$$\overline{Mq} = 0$$

alſo

$$\overline{MP}^2 = 0$$

alſo liegt M in $\overline{BC}$, alſo iſt es der Durchſchnittspunkt von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, alſo iſt B dieſer Durchſchnittspunkt.

Ferner zieht man aus der Gleichung

$$\overline{MP}^2 = A \cdot \overline{Mq} \cdot \overline{Mr}$$

$$\frac{\overline{Mq}}{\overline{MP}} = \frac{MP}{A \cdot \overline{Mr}}$$

alſo iſt das letzte Verhältniſs von $\overline{Mq}$ zu $\overline{MP} = 0$, alſo geht die Curve nicht nur durch den Punkt B, ſondern ſie hat auch in eben dieſem Punkte B, $\overline{AB}$ als Tangente. Eben ſo beweiſet man, daſs die Curve durch C geht, und $\overline{AC}$ zur Tangente hat.

Es ſey nun

$$\overline{BP} = x$$
$$\overline{MP} = y$$
$$\overline{BC} = a$$
$$A\hat{B}C = b$$
$$A\hat{C}B = c$$

Ich habe alſo aus den Bedingungen der Aufgabe

$$yy = A \cdot \overline{Mq} \cdot \overline{Mr}$$

oder weil

$$\overline{Mq} = \overline{Pq} - y$$
$$\overline{Mr} = \overline{Pr} - y$$

ſo habe ich

$$yy = A\,(\overline{Pq} - y)\,(\overline{Pr} - y)$$

oder

$$(1 - A)\,yy + A(\overline{Pq} + \overline{Pr})y - A \cdot \overline{Pq} \cdot \overline{Pr} = 0 \ldots \text{(A)}$$

Man ſoll noch $\overline{Pq}$, $\overline{Pr}$ finden.

Das Dreyeck qBp giebt

$$\overline{Pq} = x \cdot tang\ b$$
$$Pr = (a - x) \cdot tang\ c$$

Subſtituirt man in (A), ſo hat man

$$(1 - A)\,yy + A\,\{x\ tang\ b + (a - x)\ tang\ c\}\,y - A \cdot x \cdot tang\ b \cdot (a - x)\ tang\ c = 0$$

eine

ein Gleichung für Kegelſchnitte, man kann alſo daraus verſchiedene Eigenſchaften dieſer Curven ziehn.

Unmittelbar folgt, daſs in jedem Kugelſchnitte, wenn man an zweyen ſeiner Punkte B, C die Tangenten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ zieht, und dieſe Punkte B, C durch eine Linie $\overline{BC}$ verbindet, jede Transverſale, die ſenkrecht auf $\overline{BC}$ ſteht, von der Beſchaffenheit ſeyn wird, daſs $\overline{MP}^2$ in gegebenem Verhältniſſe mit $\overline{BD} \cdot \overline{CD}$ ſtehe. Denn wir haben eben geſehen, daſs man immer einen Kegelſchnitt ziehen kann, der dieſer Bedingung Gnüge leiſte. Aber man kann nur einen einzigen Kegelſchnitt beſchreiben, der beyde Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ in den Punkten B, C berührt, und der zugleich durch den beſchreibenden Punkt M geht.

388. Wenn die Transverſale $\overline{rpP}$ ſtatt, auf $\overline{BC}$ ſenkrecht zu ſtehen, mit ihr einen andern Winkel machte, ſo würde jedes der neuen Segmente auf dieſer Transverſale, in gegebenem Verhältniſſe mit dem ſtehen, das ſtatt fand, als die Transverſale ſenkrecht war, alſo überhaupt gilt

Ein und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn man willkührlich in jedem Kegelſchnitte nach gegebener Richtung eine Transverſale zieht, ſo iſt das Quadrat des Theils dieſer Transverſale, zwiſchen der Curve und einer feſten Sehne in gegebenem Verhältniſs zu dem Producte der beyden Theile dieſer Transverſale, zwiſchen demſelben Punkte der Curve, und den

beyden Tangenten an den Enden der Sehne.

389. Man ziehe durch die Punkte B, C zwey neue Sehnen nach einem andern Punkte D, so findet dieselbe Eigenschaft für eine jede von ihnen statt. Nennt man also

Y, Y', Y'', die Segmente derselben Transversale zwischen der Curve und den Sehnen $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$;

Z, Z', Z'', die Segmente der Transversale zwischen der Curve und den Tangenten $\overline{BA}$, $\overline{CA}$, $\overline{DG}$, so hat man

$$YY = KZZ'$$
$$Y'Y' = K'ZZ''$$
$$Y''Y'' = K''Z'Z''$$

wo K, K', K'' 3 Constanten sind; multiplicirt man diese Gleichungen, und zieht die Quadratwurzel aus, so hat man

$$YY'Y'' = ZZ'Z'' \sqrt{(KK'K'')}$$

390. Nimmt man auf der Curve einen neuen Punkt E, und verbindet die 4 Punkte, B, C, D, E zu zweyen durch grade Linien, zieht man noch an jedem dieser Punkte eine Tangente, so entsteht ein eingeschriebenes und ein umschriebenes Viereck. Nennt man nun

Y, Y', Y'', Y''' die Segmente auf der Transversale zwischen dem beschreibenden Punkt M, und den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$

Z, Z', Z'', Z''' die Segmente auf der Transversale zwischen dem beschreiben-

den Punkte M und den Tangenten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{GI}$, $\overline{GH}$,

so hat man, da diese neuen Sehnen und Tangenten dieselben Eigenschaften, als die haben, die das Dreyeck ABC ausmachten,

$$YY = KZZ'$$
$$Y'Y' = K'Z''Z'''$$
$$Y''Y'' = K''ZZ''$$
$$Y'''Y''' = K'''Z'Z'''$$

also

$$YY'Y''Y''' = ZZ'Z''Z''' \sqrt{(KK'K''K''')}$$

Man sieht leicht, dass dieselben Betrachtungen auf jede anderen Vielecke angewandt werden können, dass also allgemein

Zwey und vierzigster Lehrsatz.

391. Wenn man in einem Kegelschnitt ein Vieleck beschreibt, und ein anderes umschreibt, das seine Berührungspunkte zu den Winkelpunkten des eingeschriebenen hat, dann eine beliebige Transversale, nach gegebener Richtung (d. h. einer festen Axe parallel zieht, so ist das Product aller Segmente dieser Transversale zwischen dem beschreibenden Punkt, und jeder Seite des eingeschriebenen Vielecks, in gegebenem Verhältnisse zu dem Producte aller Segmente derselben Transversale, zwischen dem beschreibenden Punkt und jeder Seite des umschriebenen Vielecks.

392. Es ſey $ABCDEF$ (Fig. 162.) ein beliebiges Vieleck von grader Seitenzahl, in einem Kegelſchnitt beſchrieben; ziehen wir eine Transverſale $\overline{MN}$ einer feſten Axe parallel, die die Curve und alle Seiten des Vielecks ſchneidet, ſo iſt, wenn wir von irgend einer Seite an zählen, das Product aller Segmente auf dieſer Transverſale zwiſchen M und den graden Seiten, zu dem Producte der Segmente zwiſchen M und den ungraden Seiten in gegebenem Verhältniſſe d. h. in einem Verhältniſſe, das unverändert bleibt, wo auch der Punkt M iſt, ſo lange nur die Transverſale der feſten Axe parallel bleibt.

Wir wollen annehmen, das Vieleck ſey ein Sechseck; ich ziehe die Diagonale $\overline{AD}$, ſo daſs $ABCD$, $AFED$ zwey Vierecke ſind, und bezeichne das Segment zwiſchen M, und $\overline{AB}$ mit $(MA'B')$ u. ſ. w. ſo iſt

$$(MA'B')\,(MC'D') = K\,(MB'C')\,(MA'D')$$
$$(MA'F')\,(MD'E') = K'\,(ME'F')\,(MA'D')$$

alſo

$$K'\,(MA'B')\,(MC'D')\,(ME'F') = K\,(MB'C')\,(MA'F')\,(MD'E')$$

was zu beweiſen war.

Iſt der Satz für ein Sechseck bewieſen, ſo wird er eben ſo für ein Achteck bewieſen, indem man es in ein Sechseck und in ein Viereck zerlegt, es iſt alſo allgemein.

Drey und vierzigſter Lehrſatz.

393. Wenn man zu einem Kegelſchnitt ein grades Vieleck beſchreibt, das eine grade Seitenzahl hat, und eine Transverſale parallel mit einer feſten Axe zieht, die dieſe Curve und die Seiten des Vielecks ſchneidet, ſo iſt das Product aller Segmente zwiſchen einem Punkte, wo die Curve von der Transverſale geſchnitten wird, und allen graden Seiten in gegebenem Verhältniſs zu dem Producte aller Segmente zwiſchen demſelben Punkte der Curve und den ungraden Seiten.

394. Iſt die Seitenzahl des Vielecks ungerade, ſo kann man den vorigen Satz anwenden, wenn man einen Winkelpunkt des Vielecks als eine unendlich kleine Seite anſieht. Dieſe unendlich kleine Seite wäre das Element des Umfangs, und folglich wäre ſeine Richtung die der Tangente.

395. Es verdient bemerkt zu werden, daſs alle dieſe Sätze auf Vielecke im allgemeinſten Sinne anwendbar ſind, z. B. auf das Viereck, wie wir es (99.) nahmen.

396. Der vorige Satz iſt an Folgen fruchtbar.

Man nehme z. B. willkührlich 6 Punkte A, B, C, D, E, F auf dem Umfange eines Kegelſchnitts an (Fig. 163.). Verbindet man dieſe Punkte durch Linien, um das Sechseck $ABCDEF$ zu bilden, und verlängert die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, die am Winkel A liegen, und die Seiten DC, DE, die am gegenüberſtehenden

Winkel D liegen, bis ſie die erſten in M und N treffen, zieht dann die beyden Diagonalen $\overline{BE}$, $\overline{FC}$, ſo behaupte ich, daſs dieſe beyden Diagonalen, und die Linie $\overline{MN}$ ſich in einem Punkte R ſchneiden.

Es ſeyen p, q die Durchſchnittspunkte von $\overline{MN}$ und der Curve. Man ziehe mit $\overline{MN}$ ein beliebige Parallele $\overline{mn}$, welche die Curve in f, g, die beyden Linien $\overline{AM}$, $\overline{AN}$ in m, n, die beyden Linien $\overline{DM}$, $\overline{DN}$ in s, t, und die beyden Diagonalen $\overline{BE}$, $\overline{FC}$ in r, r' ſchneide, nach der vorigen Bemerkung (394.) bildet $ABEDCFA$ ein neues Sechseck, und man hat (392.)

$$\overline{fm} \cdot \overline{ft} \cdot \overline{fr'} = K \cdot \overline{fr} \cdot \overline{fs} \cdot \overline{fn}$$

wo K eine Conſtante iſt.

Jetzt ſoll $\overline{mn}$ ſich mit ſich ſelbſt parallel bewegen, und in $\overline{MN}$ fallen, ſo werden die Punkte s und m in M, die Punkte t und n in N fallen und die Gleichung wird

$$\overline{pR'} = K \cdot \overline{pR}$$

wenn wir annehmen, daſs r, r' in R, R' übergehen.

Eben ſo giebt der andere Durchſchnitt q von $\overline{MN}$ mit dem Umkreiſe

$$\overline{qR'} = K \cdot \overline{qR}$$

woraus mit der vorigen verbunden

$$\overline{pR'} \cdot \overline{qR} = \overline{pR} \cdot \overline{qR'}$$

Nehmen wir nun $RR' = x$ an, ſo haben wir

$$\overline{pR'} = \overline{pR} + x$$
$$\overline{qR'} = \overline{qR} - x$$

alſo

$$\overline{pR} \cdot \overline{qR} + \overline{qR} \cdot x = \overline{pR} \cdot \overline{qR} - \overline{pR}\, x$$

oder

$$x(\overline{pR} + \overline{qR}) = 0$$

oder

$$x = 0$$

d. h. $rr' = 0$ oder die Punkte R, R', fallen in einander, die 3 Linien $\overline{MN}$, $\overline{BE}$, $\overline{FC}$ kreuzen sich also in einem Punkte.

397. Stellen wir uns nun vor, dafs die Punkte A, B, C, D, E, F, sich willkührlich auf dem Umfange der Curve bewegen, so dafs die anfängliche Ordnung gestört werde, so wird doch die Eigenschaft noch in jedem correlativen Systeme bestehen, d. h. überhaupt gilt

Vier und vierzigster Lehrsatz.

Wenn man auf dem Umfang eines Kegelschnittes willkührlich 6 Punkte A, B, C, D, E, F annimmt und die Linien $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ verlängert, bis sie die Linien $\overline{DC}$, $\overline{DE}$ in M, und N treffen, so schneiden sich $\overline{MN}$, $\overline{BE}$, $\overline{FC}$ in einem Punkte.

398. Die 6 Punkte sollen die Lage (Fig. 164.) annehmen, so werden $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, die Diagonalen waren, zu Seiten, und die Punkte M, N, R bleiben immer in einer graden Linie, also

Fünf und vierzigster Lehrsatz.

In jedem Sechseck, das einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, liegen die 3

Punkte, wo ſich die gegenüberſtehenden Seiten ſchneiden, in einer graden Linie.

399. Werden die 3 Seiten $\overline{AF}$, $\overline{DC}$, $\overline{BE}$ jede $= o$, ſo bilden ſie verlängert Tangenten, und die 3 andern ein Dreyeck, alſo

Sechs und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn man ein Dreyeck in einen Kegelſchnitt beſchreibt, und ein anderes umſchreibt, deſſen Berührungspunkte die Winkelpunkte des erſten ſind, ſo ſind die 3 Durchſchnittspunkte der Seiten des eingeſchriebenen Dreyecks mit den reſpectiven Seiten des Umſchriebenen immer in einer graden Linie.

Dieſe Bemerkung iſt ſchon vorher beſonders für den Kreis gemacht.

400. Im Sechsecke (Fig. 165.) ſollen nur zwey Seiten $\overline{CF}$, $\overline{BE}$, $= o$ werden, ſo wird aus der Figur ein eingeſchriebenes Viereck, und $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ verlängert werden in B, C, Tangenten. Iſt alſo

$$R = \overline{BE} \cdot \overline{CF}$$
$$M = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$
$$N = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

ſo liegen M, N, R in einer graden Linie.

Eben ſo wenn R' der Durchſchnittspunkt der Tangenten durch die Endpunkte der andern Diagonale AD iſt, ſo muſs R' mit M, N in einer graden

Linie liegen, alſo liegen M, N, R, R' alle in einer graden Linie, oder überhaupt

Sieben und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn man in einem Kegelſchnitt ein Viereck beſchreibt, und ein anderes ſo umſchreibt, daſs die Berührungspunkte des letzten in die Winkelpunkte des erſten fallen, ſo liegen die beyden Durchſchnittspunkte der gegenüberſtehenden Seiten des eingeſchriebenen Vierecks, die beyden Durchſchnittspunkte der Seiten des umſchriebenen Vierecks, alle 4 auf derſelben graden Linie.

401. Wir wollen die beyden Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ des eingeſchriebenen, und die beyden Diagonalen $\overline{ad}$, $\overline{bc}$ des umſchriebenen Vierecks ziehen, ſo werden ſich alle dieſe Diagonalen in einem Punkte K ſchneiden.

Man braucht nur ſtatt des Vierecks $ABDC$ das Viereck $ABCD$ zu betrachten, welches dieſelben Winkelpunkte wie das erſte hat, aber welches von den beyden ſich am Scheitel entgegengeſetzten Dreyecken ABK, CDK gebildet iſt, ſo beweiſt der vorige Satz, daſs b, c, K, M, ſo wie a, d, K, N auf einer graden Linie liegen müſſen, alſo

Acht und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn man in einem Kegelſchnitt ein Viereck beſchreibt, und ein anderes umſchreibt, deſſen Berührungspunkte die

Winkelpunkte des erſten ſind, ſo ſchneiden ſich die 4 Diagonalen dieſer Vierecke alle in einem Punkte.

402. Wenn man alſo um einen Kegelſchnitt ein Viereck *abde* beſchreibt, ſo ſchneiden ſich die beyden Diagonalen dieſes Vierecks und die beyden Linien, welche durch die Berührungspunkte der gegenüberſtehenden Seiten gezogen werden, in einem Punkte.

403. Man kann dieſe Theorie leicht auf Vielecke von beliebiger Seitenzahl ausdehnen. Es ſey z. B. (Fig. 166.) ein Achteck *ABCDEFGH*; durch die beyden Diagonalen $\overline{BD}$, $\overline{FH}$ ziehe ich das Sechseck *ABDEFH* daraus, und eben ſo, wenn ich die Diagonalen $\overline{BH}$, $\overline{DF}$ ziehe, das Sechseck *BCDFGH* alſo nach dem, was oben (396.) geſagt iſt, wenn man $\overline{BF}$, $\overline{DH}$ zieht und alle Seiten, bis wo ſie zuſammentreffen, in *M*, *N*, *P*, *Q* verlängert, ſo ſchneiden ſich

1) die 3 Linien $\overline{BF}$, $\overline{DH}$, $\overline{MN}$ in einem Punkt,

2) die 3 Linien $\overline{BF}$, $\overline{DH}$, $\overline{PQ}$ in demſelben Punkte,

alſo alle 4 in einem Punkte, und da daſſelbe immer ſtatt finden muſs, wie auch die Punkte auf dem Umfang liegen, ſo folgt

Neun und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn 8 Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, auf dem Umfange eines Kegelſchnitts liegen, ſo iſt

$$\overline{BF}\cdot\overline{DH} \mp \overline{AB}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{AH}\cdot\overline{EF}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{FG}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{GH}$$

404. Es verſteht ſich von ſelbſt, daſs alle dieſe Sätze für Kegelſchnitte, auch für den Kreis gelten.

405. Dieſelbe Theorie iſt auch, wie auf einen beſondern Fall, auf die Vereinigung zweyer graden Linien, die man als Aſymptoten einer Hyperbel oder als eine unendlich verlängerte Hyperbel betrachtet, anwendbar. Z. B. hat man zwey Linien $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ (Fig. 167.) gezogen, die ſich in R ſchneiden, und nimmt nach Belieben eine gewiſſe Anzahl Punkte A, A', A'' auf der einen und eben ſo viel correſpondirende Punkte B, B', B'' auf der andern, zieht dann die Linien $\overline{AB'}$, $\overline{BA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'A''}$, $\overline{A''B''}$, $\overline{B''A}$, ſo bildet die Vereinigung dieſer Linien ein Vieleck $ABA'B'A''B''$, das der Figur, die aus den Linien $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ beſteht und die wie eine Hyperbel betrachtet wird, eingeſchrieben iſt. Zieht man alſo eine Transverſale $\overline{ab}$, welche die erſte dieſer Linien in a, die zweyte in b, und die verlängerten Seiten des Vielecks in c, c', c'', c''', c'''', c''''' ſchneidet, ſo hat man

$$\frac{\overline{ac}\cdot\overline{ac''}\cdot\overline{ac''''}}{\overline{ac'}\cdot\overline{ac'''}\cdot\overline{ac'''''}} = \frac{\overline{bc}\cdot\overline{bc''}\cdot\overline{bc''''}}{\overline{bc'}\cdot\overline{bc'''}\cdot\overline{bc'''''}}$$

Eben ſo bey den andern für jede Lage der Transverſale und jede Seitenzahl des Vielecks.

Eben ſo kann man aus (396.) ſchlieſsen, daſs

$\overline{AB}$ $\overline{B'A''}$
$\overline{BA'}$ $\overline{A''B''}$
$\overline{A'B'}$ $\overline{B''A}$

in einer graden Linie liegen müſſen.

406. Hat man alſo ein Viereck $ABCD$ mit zwey Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ und zieht eine beliebige Transverſale $\overline{mp}$, die $\overline{AB}$ in m, $\overline{AC}$ in p, $\overline{BD}$ in q, $\overline{CD}$ in n, $\overline{BC}$ in L, $\overline{AD}$ in K ſchneidet, ſo hat man

$$\frac{\overline{Km} \cdot \overline{Kn}}{\overline{Lm} \cdot \overline{Ln}} = \frac{\overline{Kp} \cdot \overline{Kq}}{\overline{Lp} \cdot \overline{Lq}}$$

d. h.

Funfzigſter Lehrſatz.

Wird ein Viereck mit 2 ſeiner Diagonalen, durch eine beliebige Transverſale geſchnitten, ſo verhalten die Producte der Segmente auf dieſer Transverſale zwiſchen einer Diagonale, und den gegenüberſtehenden Seiten zu zweyen genommen, ſich wie die Producte der Segmente auf eben dieſer Transverſale, zwiſchen der andern Diagonale, und denſelben gegenüberſtehenden Seiten.

Dieſer Satz iſt eine Generaliſation von (225.), wo die Transverſale in die dritte Diagonale $\overline{FG}$ des Vierecks fällt.

407. Man kann eben ſo aus (405.) folgenden merkwürdigen Lehrſatz ſchlieſsen:

Ein und funfzigſter Lehrſatz.

Wenn 5 unbeſtimmte grade Linien, die wir a, b, c, d, e nennen wollen, in derſelben Ebene gezogen ſind, ſo ſchneiden ſich folgende 6 Linien in einem Punkte.

1) a

2) $b \quad c \quad d \quad e$

3) $e \quad a \quad b \quad c \quad d \quad c \quad b \quad e \quad a \quad d$

4) $e \quad b \quad d \quad c \quad a \quad b \quad e \quad c \quad d \quad a$

5) $d \quad a \quad b \quad c \quad e \quad c \quad d \quad b \quad a \quad e$

6) $d \quad a \quad c \quad b \quad e \quad b \quad d \quad c \quad a \quad e$

Formeln die bestehen, wie man auch a, b, c, d, e verwechselt.

Sechs und sechszigste Aufgabe.

408. Wenn eine Curve, die in einer Ebene beschrieben ist, auf zwey senkrechte Axen, durch eine Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate bezogen ist, die Tafel der vorzüglichsten, dem beschreibenden Punkte entsprechenden Veränderlichen zu bilden, alle in Werthen der Coordinaten, und Constanten ausgedrückt.

Ich werde mich zu dieser Tafel auf den Radius Vector, den Winkel, den er mit der Abscissenaxe macht, den Winkel, den die Tangente mit der Ordinate macht, die Subtangente, die Normale und noch einige gleich anzuführende Veränderliche beschränken.

Es sey M (Fig. 169.) der beschreibende Punkt, wir wollen beliebig auf der Axe einen Punkt B nehmen, das Dreyeck MAB bilden, und aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten Perpendikel sen-

ken. Ich beſchränke mich auf dieſe Conſtruction, der man leicht ſo viel andere Linien, als man will, zuſetzen kann.

So wie nun der Punkt M fortrückt, werden $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MT}$, $\overline{MN}$, $\overline{MP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{MR}$ u. ſ. w., ſo wie ihre Segmente $\overline{AK}$, $\overline{MK}$, $\overline{RK}$ u. ſ. w. und die Winkel $M\hat{A}B$, $A\hat{M}B$ u. ſ. w. den Werth verändern. Es ſind alſo eben ſo viel Veränderliche, von denen man 2 zu Coordinaten der Curve nehmen kann, und die ich in die Tafel aufnehmen werde.

Einige Glieder der Tafel können, wie man weiſs, nur durch Differentialformeln allgemein ausgedrückt werden, und werden erſt durch die Anwendung auf jeden einzelnen Fall endlich.

Es ſey nun
die Abſciſſe $\overline{AP} = x$
die Ordinate $\overline{MP} = y$
die Entfernung AB des Punktes B vom Anfangspunkt A der Coordinaten $= a$
ſo hat man folgende Tafel:

Werthe der Winkel.

1) $tg\ A\hat{M}P = \frac{x}{y}$

2) $tg\ B\hat{M}P = \frac{a-x}{y}$

3) $tg\ A\hat{M}B = \frac{ay}{yy-x(a-x)}$

4) $tg\ B\hat{A}K = \frac{a-x}{y}$

5) $tg\ M\hat{A}K = \frac{yy - x(a-x)}{ay}$

6) $tg\ M\hat{A}B = \frac{y}{x}$

7) $tg\ A\hat{B}K = \frac{x}{y}$

8) $tg\ M\hat{B}K = \frac{yy - x(a-x)}{ay}$

9) $tg\ M\hat{B}A = \frac{y}{a-x}$

10) $tg\ A\hat{K}P = \frac{y}{a-x}$

11) $tg\ B\hat{K}P = \frac{y}{x}$

12) $tg\ A\hat{K}B = \frac{ay}{x(a-x) - yy}$

13) $tg\ M\hat{T}P = \frac{dy}{dx}$

14) $tg\ T\hat{M}A = \frac{ydx - xdy}{xdx + ydy}$

Werthe der Linien.

15) $\overline{AB} = a$

16) $\overline{AP} = x$

17) $\overline{MP} = y$

18) $\overline{BP} = a - x$

19) $\overline{KP} = \frac{x(a-x)}{y}$

20) $\overline{KG} = \frac{x(yy - x(a-x))}{y\sqrt{(xx+yy)}}$

21) $\overline{KH} = \frac{(a-x)(yy - x(a-x))}{y\sqrt{((a-x)^2+yy)}}$

22) $\overline{AM} = r(xx+yy)$

23) $\overline{BM} = r((a-x)^2+yy)$

24) $\overline{AH} = \frac{ay}{r((a-x)^2+yy)}$

25) $\overline{BG} = \frac{ay}{r(xx+yy)}$

26) $\overline{MK} = \frac{yy-x(a-x)}{y}$

27) $\overline{AK} = \frac{x}{y}r(yy+(a-x)^2)$

28) $\overline{BK} = \frac{a-x}{y}r(yy+(a-x)^2)$

29) $\overline{MG} = \frac{yy-x(a-x)}{r(xx+yy)}$

30) $\overline{AG} = \frac{ax}{r(xx+yy)}$

31) $\overline{MH} = \frac{yy-x'(a-x)}{r((a-x)^2+yy)}$

32) $\overline{BH} = \frac{a(a-x)}{r((a-x)^2+yy)}$

33) $\overline{GH} = \frac{a(y-x(a-x))}{r(xx+yy)((a-x)^2+yy)}$

34) $\overline{GP} = r\left(\frac{yy+(a-x)^2}{xx+yy}\right)$

35) $\overline{HP} = (a-x)r\left(\frac{xx+yy}{yy+(a-x)^2}\right)$

36) $\overline{TP} = y\frac{dx}{dy}$

37) $\overline{TQ} = \frac{xdxdy-ydx^2}{r(dx^2+dy^2)}$

38) $\overline{PN} = y\frac{dy}{dx}$

39)

39) $\overline{MT} = y\,r\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)$

40) $\overline{AQ} = \frac{xdx - ydx}{r(dx^2 + dy^2)}$

41) $\overline{MN} = y\,r\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)$

42) $\overline{MR} = \frac{-dy}{d\left(\frac{dx}{r(dx^2 + dy^2)}\right)}$

Werthe der Flächen.

43) $\overline{\overline{AMB}} = \frac{1}{2}\,ay$

44) $\overline{\overline{AMP}} = \frac{1}{2}\,xy$

45) $\overline{\overline{BMP}} = \frac{1}{2}\,(a-x)\,y$

46) $\overline{\overline{AKB}} = \frac{ax\,(a-x)}{2y}$

47) $\overline{\overline{AKP}} = \frac{xx\,(a-x)}{2y}$

48) $\overline{\overline{BKP}} = \frac{x\,(a-x)^2}{2y}$

49) $\overline{\overline{AMK}} = \frac{x\,(yy - x\,(a-x))}{2y}$

50) $\overline{\overline{BMK}} = \frac{1}{2}\,a\,(a-x)$

409. Man ſieht leicht, wie durch Verbindung der einzelnen Glieder der Tafel nur aus dieſen 50 eine ungeheuere Menge neuer Formeln abgeleitet werden können.

An einigen Beyſpielen wollen wir den Gebrauch der Tafel zeigen.

Sieben und ſechszigſte Aufgabe.

410. Die Gleichung der Curve iſt zwiſchen der Abſciſſe $\overline{AB}$ (Fig. 169.) und der Ordinate $\overline{MP}$ gegeben, man ſoll ihre Gleichung zwiſchen dem Radius Vector $\overline{AM}$ und dem Winkel $M\hat{A}B$ finden.

Es ſey

$$\overline{AM} = r$$
$$M\hat{A}B = \phi$$

Die Formeln (6, 22.) geben

$$tg\phi = \frac{y}{x}$$
$$r = r\,(xx + yy)$$

man braucht alſo nur aus dieſen beyden Formeln die Werthe von x, y in Werthen von r, ϕ zu ziehen und ſie in die Gleichung zwiſchen x, y zu ſubſtituiren. So erhält man

$$x = r \,.\, cof\,\phi$$
$$y = r \,.\, ſin\,\phi$$

Acht und ſechszigſte Aufgabe.

411. Die Gleichung der Curve AMB (Fig. 169.) in x, y, iſt gegeben, man ſoll das Coordinatenſyſtem ſo verändern, daſs die neue Gleichung zwiſchen $\overline{AP}$, $\overline{KP}$ ſtatt findet, wo $\overline{AP}$ die alte Abſciſſe iſt, $\overline{KP}$ aber das Perpendikel auf die Abſciſſenaxe aus K geſenkt, wo ſich die Perpendikel aus A, B, auf $\overline{BM}$, $\overline{AM}$ geſenkt kreuzen.

Man kann die Aufgabe auch ausdrücken

Den geometrischen Ort aller Punkte K zu finden, wo sich die 3 Perpendikel im Dreyeck MAB aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten schneiden.

Es sey

$$KP = z$$
$$AB = a$$

so haben wir Form. 19.

$$z = \frac{x\,(a-x)}{y}$$

oder

$$y = \frac{x\,(a-x)}{z}$$

Substituirt man diesen Werth von y in die gegebene Gleichung der Curve, so hat man die gesuchte Gleichung zwischen x und z.

412. Es sey z. B. (Fig. 170.) die Curve eine Ellipse und $\overline{AB}$ die grosse Axe. So ist die Gleichung

$$yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$$

Setzt man in die Gleichung

$$y = \frac{x\,(a-x)}{z}$$

so erhält man

$$xx\,(a-x)^2 = zz\frac{bb}{aa}(ax - xx)$$

oder wenn man mit $\frac{aa}{bb\,x\,(a-x)}$ multiplicirt

$$zz = \frac{aa}{bb}(ax - xx)$$

d. h. der gesuchte Ort ist eine neue Ellipse, deren kleine Axe $= a$, und deren grosse Axe $= \frac{aa}{b}$ d. h. gleich dem Parameter der kleinen Axe der ersten Ellipse.

Neun und sechszigste Aufgabe.

413. Die Gleichung einer Curve ist zwischen den Winkeln $M\hat{A}B$, $M\hat{B}A$ gegeben, man sucht sie zwischen $\overline{AP}$ und $\overline{MP}$.

Es sey

$$M\hat{A}B = \varphi$$
$$M\hat{B}A = \psi$$

so geben die Formeln (6, 9.)

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x}$$

$$tg\,\psi = \frac{y}{a - x}$$

414. Die Gleichung sey z. B.

$$\varphi + \psi = m$$

wo m eine Constante ist. Da also

$$\varphi = m - \psi$$

oder

$$tg\,\varphi = \frac{tg\ m - tg\ \psi}{1 + tg\,m \,.\, tg\,.\,\psi}$$

oder

$$tg\,\varphi + tg\,m\,.\,tg\,\psi\,.\,tg\,\varphi = tg\,m - tg\,\psi$$

Die Subſtitution giebt alſo

$$tg\, m . xx + tg\, m . yy - a\, tg\, m . x + ay = 0$$

eine Gleichung des Kreiſes.

415. Wäre die Gleichung

$$\phi - \psi = m$$

geweſen, ſo würde man eben ſo

$$tg\, xx - tg\, m\, yy - a\, tg\, m\, x + ay = 0$$

eine Gleichung für die Hyperbel erhalten haben, was wir ſchon für den Fall, wenn

$$m = \pi$$

(105.) geſehen haben.

416. Wäre die Gleichung zwiſchen x, y gegeben, und ſollte man die zwiſchen ϕ, ψ ſuchen, ſo kann man nur die Werthe (413.) ſubſtituiren. So hat man

$$x . tg\, \phi = y$$
$$a\, tg\, \psi - x\, tg\, \psi = y$$

alſo

$$x = \frac{a . tg\, \psi}{tg\, \phi + tg\, \psi}$$
$$y = \frac{a . tg\, \phi . tg\, \psi}{tg\, \phi + tg\, \psi}$$

Sucht man z. B. die Gleichung der graden Linie, welche der Punkt M beſchreibt, indem man ſie auf zwey feſte Axen A, B bezieht, und zu Coordinaten die Winkel $M\hat{A}B$, $M\hat{B}A$ (Fig. 171.) nimmt, ſo ſubſtituirt man die gefundenen Werthe, in die Gleichung

$$y = nx + m$$

und erhält

$$a\, tg\, \phi . tg\, \psi = m . tg\, \phi + m\, tg\, \psi + na\, tg\, \psi$$

oder

$$tg\,\phi . tg\,\psi = \frac{m}{a} tg\,\phi + \frac{m + na}{a} tg\,\psi = 0$$

Die Gleichung für die grade Linie alſo, wenn man ſie durch Winkel auf 2 feſte Punkte bezieht, hat die Geſtalt

$$tg\,\phi . tg\,\psi + A\,tg\,\phi + B\,tg\,\psi = 0$$

417. Man ſieht alſo, daſs das neue Coordinatenſyſtem auch den Grad der Gleichung für die Curve verändert, z. B. die grade Linie einen Grad höher macht, den Kreis einen Grad niedriger.

Allgemein ſind alle Kegelſchnitte auf ihre Brennpunkte bezogen, nur vom erſten Grade. Eben ſo die Conchoïde und Ciſſoïde, die auf rechtwinklichte Axen bezogen, Gleichungen vom 4ten Grade haben werden lineär, wenn man die Gröſsen, die, man gewöhnlich zu ihrer Conſtruction braucht, als Coordinaten annimmt.

418. Man hat alſo nicht immer die Gleichung der Curve in ihrer gröſsten Einfachheit, wenn man ſie auf 2 rechtwinklichte Axen bezieht. Es mag dieſs gerne die beſte Art ſeyn, die Curven im Allgemeinen zu vergleichen, es iſt aber gewiſs nicht immer das leichteſte Mittel die Eigenſchaften einer jeden insbeſondere zu finden.

Siebenzigſte Aufgabe.

419. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ (Fig. 169.) gegeben, man ſucht ſie zwiſchen $\overline{AP}$, $\overline{MP}$.

Es ſey

$$\overline{MA} = u$$
$$\overline{MB} = v$$

Die Formeln (22, 23.) geben

$$u = r\,(xx + yy)$$
$$v = r\,((a-x)^2 + yy)$$

Die Gleichung ſey z. B.

$$u = mv$$

wo m eine Conſtante iſt, ſo iſt die Gleichung in x, y

$$r\,(xx+yy) = m\,r\,((a-x)^2 + yy)$$

oder

$$xx(1-mm) + yy(1-mm) + 2am\,x - mmaa = 0$$

eine Gleichung für den Kreis

Ein und ſiebenzigſte Aufgabe.

420. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen den Coordinaten $\overline{AG}$, $\overline{BG}$ (Fig. 169.) gegeben, man ſenkt ſie zwiſchen $\overline{AP}$, $\overline{MP}$.

Es ſey

$$\overline{AH} = u$$
$$\overline{BG} = v$$

ſo geben die Formeln (24, 25.)

$$u = \frac{ay}{r\,((a-x)^2+yy)}$$

$$v = \frac{ay}{r\,(xx+yy)}$$

Zwey und ſiebenzigſte Aufgabe.

421. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen den Flächen $\overline{AMK}$, $\overline{BMK}$ (Fig. 169.) gegeben, man ſucht ſie zwiſchen $\overline{AP}$, $\overline{MP}$.

Es ſey

$$\overline{AMK} = u$$
$$\overline{MBK} = v$$

Die Formeln (49, 50.) geben

$$u = \frac{(xyy - x(a-x))}{2y}$$
$$v = \tfrac{1}{2} a (a-x)$$

Drey und ſiebenzigſte Aufgabe.

422. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ (Fig. 169.) gegeben, man ſucht ſie zwiſchen $M\hat{A}B$, $M\hat{B}A$.

Es ſey

$$\overline{MA} = t$$
$$\overline{MB} = u$$
$$M\hat{A}B = \phi$$
$$M\hat{B}A = \psi$$

ſo geben die Formeln (22, 23, 6, 9.)

$$t = r(xx + yy)$$
$$u = r((a-x)^2 + yy)$$
$$tg\,\phi = \frac{y}{x}$$
$$tg\,\psi = \frac{y}{a-x}$$

eliminirt man vermittelſt dieſer Gleichungen die Veränderlichen x, y, ſo hat man zwey Gleichungen zwiſchen t, u, ϕ, ψ, man zieht daraus die Werthe von t, u, die man in die Gleichung der Curve ſetzen muſs, ſo erhält man

$$t = \frac{a\,tg\,\psi.sec.\phi}{tg\,\phi + tg\,\psi}$$

$$u = \frac{a\,tg\,\phi\,sec.\,\psi}{tg\,\phi + tg\,\psi}$$

Vier und ſiebenzigſte Aufgabe.

423. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen dem Radius Vector $\overline{AM}$, und dem Krümmungshalbmeſſer $\overline{MR}$ gegeben, man ſucht die Gleichung zwiſchen $\overline{AP}$ und $\overline{MP}$ (Fig. 169.)

Es ſey

$$\overline{AM} = r$$

$$MR = \varrho$$

ſo geben die Formeln (22, 42.)

$$r = \gamma(xx + yy)$$

$$\varrho = -\frac{dy}{d\left(\frac{dx}{\gamma(dx^2+dy^2)}\right)}$$

Fünf und ſiebenzigſte Aufgabe.

424. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen den beyden Producten $\overline{AP}.\overline{MB}$, und $\overline{BP}.\overline{MA}$ jedes als eine einzige Veränder-

liche betrachtet gegeben, man ſucht ſie zwiſchen $\overline{AP}$, und $\overline{MP}$ (Fig. 169.)

Es ſey

$$\overline{AP} \cdot \overline{MB} = u$$
$$\overline{BP} \cdot \overline{MA} = v$$

ſo geben die Formeln (16, 22, 17, 23.)

$$u = x \sqrt{((a-x)^2 + yy)}$$
$$v = y \sqrt{(xx + yy)}$$

425. Aus den vorigen Beyſpielen ſieht man, wie wichtig die Umformung der Coordinaten, im allgemeinſten Sinne genommen, für die Theorie der Curven ſey. Und doch muſs man eine wichtige Bemerkung dabey machen, daſs, wie man auch immer das Syſtem umforme, mag man die Curve auf Punkte, Axen oder andere Gegenſtände beziehen, man immer doch nothwendigerweiſe Betrachtungen, die der Natur der Curve fremd ſind, in die Gleichung bringt; denn die Natur der Curve beſteht in ihrer Form, und in der Lage ihrer Punkte gegen einander, aber nicht in ihrer abſoluten Lage gegen feſte Punkte im Raume.

426. Man kann die Curve von den feſten Gegenſtänden im Raume losmachen, wenn man dieſe feſten Gegenſtände ſelbſt als beweglich, und als ſolche, die ein Syſtem mit der Curve ausmachen, betrachtet. Wenn z. B. eine Curve auf 2 feſte Axen im Raume bezogen iſt, ſo kann man ſich vorſtellen, daſs dieſe Axen an der Curve hängen, und mit ihr bewegt werden. Dann iſt aber die erſte Schwierigkeit durch eine andere erſetzt. Das neue Syſtem iſt ganz von den feſten Gegenſtänden befreyt, die ſeine abſolute Lage

im Raume beſtimmten, aber es iſt dagegen auch verwickelter geworden, als die Natur der Aufgabe erfordert, denn das wirklich zu betrachtende Syſtem iſt die iſolirte Curve, und die Anheftung zweyer Axen macht ein complexes Syſtem daraus.

427. Man wird um ſo beſſer die Gleichung einer Curve von den willkührlichen Gröſsen befreyen, die durch ihre Lage gegen feſte Axen hereinkommen, je weniger dieſe Gleichung in ihrer Form beſchränkt iſt. Z. B. die Eigenſchaft der Sehnen, die ſich im Kreiſe ſchneiden, ſtellt die Natur der Curve in einen allgemeinen Geſichtspunkt als ihre Gleichung auf 2 feſte Axen bezogen. Denn da die Entfernungen dieſer Axen vom Mittelpunkt in die Gleichung kommen müſſen, ſo geben die Eigenſchaften, die ſie ausdrückt, wohl Mittel an die Hand, dieſe Curve nach der Reihe mit allen möglichen Axen zu vergleichen, wozu man nur den Werth der Entfernungen zu ändern braucht, aber kein Mittel, ſie mit allen dieſen Axen zugleich zu vergleichen, ſtatt daſs die Eigenſchaften der Sehnen unabhängig von irgend einer Lage der Axen, und ſelbſt vom Parameter (dem Radius) befreyt iſt.

428. Eben daher ſind die bekannten Eigenſchaften (376.) der natürlichen Abſciſſen und Ordinaten, allgemeiner, als die der Abſciſſen im gewöhnlichen Sinne genommen.

429. Aber obgleich die Lage des Urſprungs der Coordinaten nicht in der Gleichung zwiſchen den natürlichen vorkommt, ſo bleibt doch die Richtung der Axen immer dieſelbe, und folglich muſs die Gleichung noch etwas Willkührliches enthalten, um dieſe

Richtung auszudrücken, die Form ſelbſt dieſer Gleichungen iſt alſo noch nicht ſo unabhängig, als ſie ſeyn könnte.

Um dieſe willkührlichen Gröſsen wegzuſchaffen, die aus dem Parallelismus der Coordinaten entſpringen, habe ich die Lehrſätze (377. 378.) aufgeſtellt, die alſo die Eigenſchaften der Curve noch allgemeiner ausdrücken.

430. Die Axen, die Punkte u. ſ. w., die man zu dem Syſteme hinzufügt, das man betrachten will, ſind nur Hülfsmittel, die man zur Vergleichung braucht und die man nachher eliminiren muſs, um die unmittelbaren Verhältniſſe, die man ſucht, zu erhalten. Es würde aber immer eleganter ſeyn, wenn man direct die zu vergleichenden Quantitäten behandeln könnte.

431. In jeder Curve giebt es für jeden Punkt eine Linie, die von keiner beſondern Annahme, von keinem, im abſoluten Raume genommenem Mittel zur Vergleichung abhängt, und dieſe Linie iſt der Krümmungshalbmeſſer, welcher allein durch die Geſtalt der Curve beſtimmt wird. Gäbe es für jeden Punkt noch eine zweyte eben ſo unabhängige Veränderliche, ſo könnte man, wenn man dieſe beyden als Coordinaten nähme, die Gleichung der Curve am allgemeinſten ausdrücken. Der Umfang der Curve könnte wohl dieſe zweyte Veränderliche ſeyn, wenn man nur nicht dann einen willkührlichen Punkt annehmen müſste, von dem an man ihn zählte.

432. Doch, glaube ich, kann man verſchiedene Veränderliche finden, die dieſem Zweck entſprechen,

z. B. der Winkel, den am beſchreibenden Punkte die Tangente mit der Linie macht, welche die in der Curve gezogenen unendlich kleinen Secanten, die dieſer Tangente parallel ſind, in zwey gleiche Theile theilt.

Es ſey durch den beſchreibenden Punkt M (Fig. 172.) eine Tangente $\overline{MT}$ gezogen, und eine Secante $\overline{mm'}$, die ihr parallel ſey. Aus dem Punkte M, und durch den Mittelpunkt dieſer Secante n wollen wir uns die unbeſtimmte Linie $\overline{MF}$ gezogen vorſtellen. $\overline{mm'}$ ſoll ſich ſtets der $\overline{MT}$ nähern, bis es in ſie fällt, dann iſt der letzte Werth oder die Gränze des Winkels $T\hat{M}F$ dasjenige, was ich zur zweyten Coordinate vorſchlage.

Man könnte auch den Winkel $K\hat{M}F$ nehmen. Eben ſo wenn man aus dem Endpunkte des Krümmungshalbmeſſers KF ſenkrecht auf $\overline{MF}$ zöge, ſo könnte man

$$\overline{MF},\ \overline{KF}$$

oder

$$\overline{MK},\ \overline{MF}$$

oder

$$\overline{MK},\ \overline{KF}$$

zu Coordinaten nehmen, welche alle blos von der Geſtalt der Curve abhängen. Es ſey r der Krümmungshalbmeſſer für den Punkt M

$$T\hat{M}F = \varphi$$

eine Gleichung zwiſchen r, φ wird die Natur der Curve ausdrücken.

Nennt man z. B. den Parameter $= p$, die Normale $= n$, so hat man in der Parabel

$$r = \frac{4n^3}{pp}$$

$$cotang\ \varphi = -2r\left(\frac{x}{p}\right)$$

oder weil

$$n = r(yy + \tfrac{1}{4}pp)$$

$$r = \frac{4(yy + \tfrac{1}{4}pp)^{\frac{3}{2}}}{pp}$$

$$cotang\ \varphi = -2r\left(\frac{x}{p}\right)$$

Zieht man aus diesen beyden Gleichungen die Werthe von x, y, und substituirt sie in der Gleichung

$$yy = px$$

so hat man die gesuchte Gleichung in r, φ,

$$r = \tfrac{1}{2}\, p\ cosec.\ \varphi^3$$

Hätte man so die Gleichung jeder Curve, und wollte auf die zurückkommen, die zwischen der Abscisse und Ordinate besteht, so mußte man die Werthe von r, φ, in x, y suchen. Man kennt schon

$$r = -\frac{dy}{d\left(\frac{dx}{r(dx^2+dy^2)}\right)}$$

es kommt also nur darauf an, den Werth von φ in x, y zu suchen.

Sechs und siebenzigste Aufgabe.

433. Den Werth von φ in x, y, die unter einander senkrecht sind, zu finden.

Es sey $\overset{\frown}{mMm'}$ (Fig. 172.) ein unendlich kleines Stück der vorgegebenen Curve, M der beschreibende Punkt,

$\overline{TP}$ die Abscissenaxe,

$\overline{MP}$ die Ordinate,

$\overline{MT}$ die Tangente,

$\overline{mm'}$ eine unendlich kleine mit $\overline{MT}$ parallele Sehne,

$\overline{MF}$ die Linie, welche diese Sehne in n, in zwey gleiche Theile theilt,

o der Punkt, wo diese Sehne von der Ordinate $\overline{MP}$ geschnitten wird,

$\overline{mp}$, $\overline{mp'}$ die den Punkten m, m', entsprechenden Ordinaten,

g, h, die Durchschnittspunkte dieser Ordinaten mit der Tangente,

$\overline{mrr''}$ die Linie, die senkrecht von m auf $\overline{MP}$ und $\overline{m'p'}$ gezogen ist,

$\overline{Mr'}$ das Perpendikel aus M auf $\overline{m'p'}$,

$\overline{MK}$ der Krümmungshalbmesser.

Wir haben offenbar

$$\overline{mr} = dx$$
$$\overline{Mr} = dy$$
$$\overline{Mr'} = dx + ddx$$
$$\overline{r'm'} = dy + ddy$$
$$\overline{mr''} = 2dx + ddx$$
$$m'r'' = 2dy + ddy$$

Dann geben die ähnlichen Dreyecke *mro*, *Mrh*

$$\frac{\overline{mr}}{\overline{ro}} = \frac{\overline{Mr}}{r'h} = \frac{\overline{Mr'} - \overline{mr}}{r'h - \overline{ro}}$$

oder

$$\frac{dx}{dy - \overline{Mo}} = \frac{ddx}{(r'm' + m'h) - (\overline{Mr} - \overline{Mo})}$$

oder weil $\overline{m'h} = \overline{Mo}$

$$\frac{dx}{dy - \overline{Mo}} = \frac{ddx}{ddy + 2\overline{Mo}}$$

alſo

$$dx \,.\, ddy + 2\,dx\,\overline{Mo} = dy \,.\, ddx - ddx \,.\, \overline{Mo}$$

Wirft man das letzte Glied als unendlich klein gegen die andern weg, ſo haben wir

$$\overline{Mo} = \frac{dy\ ddx - dx \,.\, ddy}{2\,dx} \qquad (A)$$

Jetzt ſuche ich $\overline{mn}$ oder $\frac{1}{2}\,\overline{mm'}$. Es iſt

$$\overline{mm'^2} = \overline{mr''^2} + \overline{m'r''^2} = (2dx + ddx)^2 + (2dy + ddy)^2$$

alſo wenn man die Gröſsen höherer Ordnungen wegwirft

$$\overline{mn}^2 = dx^2 + dy^2 + dx \,.\, ddx + dy \,.\, ddy \ldots (B)$$

Eben ſo haben wir

$$\overline{mo}^2 = dx^2 + \overline{ro}^2 = dx^2 + (\overline{Mr} - \overline{Mo})^2 = dx^2 + dy^2 - 2\,dy \,.\, \overline{Mo} \ldots (C)$$

Ziehen wir (C) von (B) ab, ſo erhalten wir

$$\overline{mn}^2 - \overline{mo}^2$$

oder

$$(\overline{mn} + \overline{mo})\ (\overline{mn} - \overline{mo}) = dx\,ddx + dy\,ddy + 2\,dy\,\overline{Mo}$$

und

und ſetzen wir in dieſe Gleichung den vorher bey (A) gefundenen Werth von $\overline{Mo}$, ſo haben wir, da $\overline{mn} - \overline{mo} = \overline{no}$

$$(\overline{mn} + \overline{mo})\ \overline{no} = \frac{ddx\,(dx^2 + dy^2)}{dx}$$

Da nun, wenn wir die höhern Differentiale vernachläſſigen,

$$\overline{mn} + \overline{mo} = 2r\,(dx^2 + dy^2)$$

ſo haben wir

$$\overline{no} = \frac{ddx}{2\,dx}\,r\,(dx^2 + dy^2) \ldots \text{(D)}$$

Das Dreyeck Mno giebt

$$\frac{\overline{Mo}}{\overline{no}} = \frac{\sin \hat{Mno}}{\sin \hat{nMo}} = \frac{\sin T\hat{M}n}{\sin(T\hat{M}n - T\hat{M}o)}$$

oder

$$\frac{\overline{Mo}}{\overline{no}} = \frac{\sin T\hat{M}n}{\sin T\hat{M}n \,.\, \cos T\hat{M}o - \sin T\hat{M}o \,.\, \cos T\hat{M}n}$$

alſo

$$\overline{no} \,.\, \sin T\hat{M}n = \overline{Mo} \,.\, \sin T\hat{M}n \,.\, \cos T\hat{M}o - \overline{Mo} \,.\, \sin T\hat{M}o \,.\, \cos T\hat{M}n$$

oder

$$\overline{no} = \overline{Mo} \,.\, \cos T\hat{M}o - \overline{Mo} \,.\, \sin T\hat{M}o \,.\, \operatorname{cotang} T\hat{M}n$$

oder

$$\operatorname{cotang} T\hat{M}n = \operatorname{cotang} T\hat{M}o - \frac{\overline{no}}{\overline{Mo} \,.\, \sin T\hat{M}o}$$

Subſtituirt man die Werthe von $\overline{no}$, $\overline{Mo}$, und bemerkt, daſs

$$\sin T\hat{M}o = \frac{dx}{r(dx^2 + dy^2)}$$

$$\cos T\hat{M}o = \frac{dy}{r(dx^2 + dy^2)}$$

$$cotang\ \hat{TMo} = \frac{dy}{dx}$$

so hat man

$$cotang\ \hat{TMn} = \frac{dy}{dx} + \frac{ddx\,(dx^2 + dy^2)}{dx^3\ d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

oder

$$cotang\ \hat{TMn} = \frac{dy}{dx} + \frac{ddx\,(dx^2 + dy^2)}{dx(dx\,ddy - dy\,ddx)} \quad \ldots\ (E)$$

434. Im Kreise z. B. müssen die Bogen $\overline{mM}$, $\overline{m'T}$ gleich, oder

$$dds = o$$

seyn, wenn mm' der Tangente $\overline{MT}$ parallel seyn soll.

Differentiirt man also die Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

so hat man

$$ds \,.\, dds = dx\ ddx + dy\ ddy$$

da aber

$$dds = o$$

so ist auch

$$dx\ ddx + dy\ ddy = o$$

was

$$ddy = -\frac{dx\,.\,ddx}{dy} \text{ giebt.}$$

Setzt man diesen Werth in (E), so hat man

$$cotang\ \hat{TMn} = \frac{dy}{dx} + \frac{ddx\,(dx^2 + dy^2)}{dx\left(\frac{-dx^2\,ddx - dy^2\,ddx}{dy}\right)}$$

oder

$$cotang\ \hat{TMn} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{dx\,(dx^2 + dy^2)} = o$$

Schluſs.

435. Obgleich alle mathematiſche Wahrheiten vollkommen gewiſs ſind, ſo haben ſie doch nicht alle einen gleichen Grad von Evidenz, vorzüglich ſind es die erſten Begriffe, die ſehr ſchwierig den geſuchten Grad von Deutlichkeit erhalten. Indeſſen darf das den Lauf des Lehrlings nicht aufhalten, haben doch die Alten, obgleich ſie die Theorie der Parallelen nicht ganz aufklären konnten, ihre fernern Unterſuchungen darum nicht beſchränkt.

So haben die Neuern, obgleich der Begriff des Unendlichen Schwierigkeiten hatte, doch dem Infinitesimalcalcul alle Entwickelungen gegeben, die man von ihrem Scharfſinn erwarten konnte. Eben ſo wenig iſt die Algebra durch die Dunkelheit aufgehalten, in der der Begriff negativer Quantitäten blieb.

d'Alembert ſagte zu jemand, der ſich über das Zwielicht beklagte, das ein gewiſſer Beweis in ſeinem Kopfe gelaſſen hatte: „gehn Sie nur weiter, „der Glaube wird ſchon kommen!“ obgleich eben der d'Alembert vielleicht mehr als ein anderer Geometer über die Metaphyſik der Wiſſenſchaften gearbeitet hat. Er nahm nach der Reihe die 3 eben angeführten Unterſuchungen über die Theorie der Parallelen, den Begriff des Unendlichen, und der negativen Quantitäten vor, und hat doch, wenn er auch ſeinen Gegenſtand nicht ganz erſchöpfte, allenthalben hin einzelne Lichtſtrahlen verbreitet. Seine Betrachtungen haben andere Geometer aufgeweckt. So gaben Bertrand und Legendre eine lichtvolle Theorie der

Parallelen, deren Theorie wohl an einem Urbegriffe hängt, der mir beynahe eben so klar wie der Begriff der vollkommenen Gleichheit oder des Deckens erscheint, ich meyne den Begriff der Aehnlichkeit. Ich glaube, man kann es als einen der evidentesten Begriffe festsetzen, dass das, was im Grosen da ist, wie z. B. eine Kugel, ein Haus, eine Zeichnung, auch im Kleinen gemacht werden kann, und umgekehrt, dass folglich, welche Figur man sich auch denkt, man sich andere von allen Grösen, und der ersten ähnliche denken kann, d. h. deren Dimensionen dasselbe Verhältniss unter einander haben als die der ersten. Es kommt ja blos darauf an, dass ich das Haus, die Kugel u. s. w. ganz isolirt, und nicht mit andern Gegenständen zugleich betrachte, oder was einerley ist, nicht mit der allgemeinen beständigen Einheit messe, sondern mit einer andern veränderlichen, die mit der Figur, deren Theil sie ist, wächst und abnimmt. Jeder kann z. B. die Höhe der Thür als Maasstab des Hauses brauchen: Ist dieser Begriff einmal zugegeben, so kann man leicht die Theorie der Parallelen begründen, ohne Zuflucht zu dem Unendlichen zu nehmen.

Andere Geometer, und vorzüglich L'huillier, haben den Begriff der Infinitesimalquantitäten aufgeklärt. Die negativen Quantitäten waren übrig, deren Theorie wenige zu ergründen suchten, obgleich sie es verdient, da sie der Algebra zum Grunde liegt, und die gewöhnlich angenommenen Begriffe nicht nur dunkel, sondern sogar falsch sind, und folglich zu Fehlschlüssen verleiten können. Ich unternahm diese

Unterſuchung und den Ideen, die dabey ſich mir darboten, verdankt dieſs Werk, das ich jetzt dem Publicum vorlege, ſeinen Urſprung. Ich habe mich beſtrebt, die Untauglichkeit dieſer falſchen Begriffe darin in ihr volles Licht zu ſtellen, und zu zeigen, daſs, wenn man das dunkele Raiſonnement, mit dem man ſie gewöhnlich begründet, bey Seite ſetzt, alle Schwierigkeiten von ſelbſt verſchwinden, ohne daſs man etwas an dem gewöhnlichen Verfahren der Rechnung zu ändern brauche.

Als ich dieſe Betrachtungen erweiterte, und die Eigenſchaften der Veränderung der Zeichen + und − in den Formeln zu erklären ſuchte, ſah ich, daſs ihr wahrer Gebrauch in dieſer Hinſicht, darin beſtehen müſſe, alle Figuren ähnlicher Art auf eine Urfigur zu beziehen, die den Betrachtungen, wie man die Formeln ſuchte, zum Grunde lag. Aehnliche Figuren nenne ich hier ſolche, deren Conſtruction weſentlich dieſelbe iſt, und die nur durch Verſetzung eines oder mehrerer ihrer entſprechenden Theile verſchieden ſind. Darauf gründet ſich das, was ich Correlation der Figuren nannte, der Gegenſtand eines früher von mir verfaſsten Werks. Das jetzt vollendete Werk iſt nur eine Ausdehnung des früheren, ich habe hier nicht allein die Verhältniſſe der Figuren unter ſich betrachtet, ſondern auch die beſondern Eigenſchaften der Urfigur, welche ich in einer allgemeinen Tafel, die ſie implicite alle umfaſst, darzuſtellen geſucht habe. Aus allem dieſem bildete oder vielmehr entwarf ich, den Lehrbegriff, den ich Geometrie der Stellung nenne.

Die in dieſem Werke vorgetragene Geometrie der Stellung und Methode der Tafeln, ſcheint mir, wenn ſie mehr vervollkommnet iſt, eine ergiebige Quelle anziehender und nützlicher Reſultate. Jede Zeile einer Tafel iſt, wie ich vorher bemerkte, ein Lehrſatz in Formeln gebracht, man braucht ſie blos ſo zu ordnen, daſs man, wenn es nöthig thut, jede finden kann. Man hat (128. u. folgende) geſehen, wie man aus Verbindung dieſer Formeln eine Menge neuer ziehen kann. So unmöglich und unnöthig es wäre, alle dieſe ſo entſtandenen beſondern Sätze in einem Lehrbegriffe der Geometrie zu umfaſſen, oder gar ſein Gedächtniſs damit zu beladen, ſo nützlich und angenehm iſt eine ſolche Uebung für Lehrlinge, denen man Bildung ſolcher Tafeln, Vergleichung der Formeln u. ſ. w., nicht genug empfehlen kann.

Eine ſolche Art von Sätzen waren die Porismen der Alten. Nicht von der Analyſe unterſtützt, bedienten ſie ſich dieſer Sätze, um eben ſo einfache als elegante Auflöſungen von damals (und zum Theil noch) ſchweren Aufgaben zu erhalten.

Es ſcheint, daſs dieſe Geometrie der Alten noch mehr in England als auf dem Continent getrieben wird. Robert Simſon hat die von Pappus geſammelten wiederhergeſtellt und bewieſen, auch mehrere in ſeinem Werke

Opera quaedam reliqua etc.

generaliſirt. Matthews Stewart erfand viele mitunter ſehr intereſſante, die er in zwey Werken

Propoſitiones geometricae more veterum demonſtratae

und

Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics

bekannt machte. Beyde Werke verdienten in das Französische, und das letzte commentirt zu werden, da es keine Beweise enthält, die sich aber durch die Theorie der Punkte der mittleren Entfernungen leicht führen lassen.

Aus den Tafeln in diesem Werke kann man leicht eine grosse Menge Porismen ziehen, wovon ich schon viele angeführt habe, und hier noch 2 zusetzen will, aus (218, 392):

I.

Es sey ABC (Fig. 173) ein eingeschriebenes Dreyeck, dessen Seiten von einer Transversale $\overline{mnp}$, in m, n, p, geschnitten werden. Wenn wir die Tangenten, die man aus m, n, p, an den Kreis ziehen kann, m', n', p' nennt, so ist

$$m'n'p' = \overline{An}.\overline{Bm}.\overline{Cp} = \overline{Am}.\overline{Bp}.\overline{Cn}$$

II.

In einem Kreise $AmBm'$ (Fig. 174) wollen wir eine Sehne $\overline{AB}$, und durch A, B, die beyden Tangenten $\overline{Ap}$, $\overline{Bq}$, und eine beliebige Transversale $\overline{pqmm'}$ ziehen, die den Kreis in m, m', und die Sehne in K schneidet, dann hat man

$$\left(\frac{\overline{mk}}{\overline{m'k}}\right)^2 = \frac{\overline{mp}\cdot\overline{mq}}{\overline{m'p}\cdot\overline{m'q}}$$

Fallen die Punkte p, q, in o zuſammen, wo ſich die Tangenten ſchneiden, ſo iſt

$$\frac{\overline{mk}}{\overline{m'k}} = \frac{\overline{mo}}{\overline{m'o}}$$

was unter Simſons Porismen vorkommt.

Ich endige das Werk mit einigen Betrachtungen über die Art, die ich im 2ten Abſchnitt vorſchlug, die Correlation der Figuren darzuſtellen.

Jeder weiſs, wie viel leichter es iſt, einen etwas verwickelten Satz zu faſſen und anzuwenden, wenn er in eine algebraiſche Formel gebracht, als wenn er durch Sprache ausgedrückt und gleichſam breit getreten wird. Doch ſtellen die algebraiſchen Zeichen nur abſolute Werthe der Quantitäten vor, und man beſtimmt ihre reſpective Lage und andere nicht direct in Gleichung zu ſetzende Verhältniſſe durch Sprache. Könnte man nun auch dieſe letzten Verhältniſſe durch Zeichen ausdrücken, ſo würde ein neuer Vortheil, nemlich, die gröſsere Leichtigkeit die Formeln zu faſſen, und anzuwenden, daraus entſtehen. Das iſt der Zweck der im zweyten Abſchnitte vorgeſchlagenen Bezeichnung, die man noch weiter ausdehnen könnte, um viele Umſchreibungen zu vermeiden. Ich glaubte nicht weiter darin gehen zu dürfen, weil dieſe Zeichen, noch nicht durch den Gebrauch geläufig geworden, leicht einigen Mathematikern misfallen könnten. Es ſey mir nur erlaubt, das in dieſer Hinſicht Geſagte noch etwas zu entwickeln.

Eine techniſche Formel iſt mir eine ſolche, welche die reſpective Stellung verſchiedener Quanti-

täten ausdrückt, wenn die algebraiſche Formel das Verhältniſs ihrer Gröſsen darſtellt.

Es kann Formeln geben, die zugleich techniſch und algebraiſch ſind: z. B. die Formeln (228), auch könnte man die in den Aufgaben XVI, XVII, u. ſ. w. gefundenen leicht darauf zurückbringen. Um z. B. die der Aufgabe XVI techniſch zu machen, braucht man ſie nur ſo auszudrücken:

Im Dreyecke ABC ſenke man aus jedem Winkel ein Perpendikel auf die gegenüberſtehende Seite. Es ſey ferner

$$B\hat{A}C = A$$
$$A\hat{B}C = B$$
$$A\hat{C}B = C$$

der Radius des umſchriebenen Kreiſes $= R$,
Der Punkt, wo die Perpendikel ſich ſchneiden $\doteq D$

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC} \doteq H$$
$$\overline{BD}\cdot\overline{AC} \doteq G$$
$$\overline{CD}\cdot\overline{AB} \doteq F$$
$$\overline{BC}\cdot\overline{FG} \doteq L$$
$$\overline{AC}\cdot\overline{FH} \doteq M$$
$$\overline{AB}\cdot\overline{GH} \doteq N$$
$$\overline{AH}\cdot\overline{FG} \doteq l$$
$$\overline{BG}\cdot\overline{FH} \doteq m$$
$$\overline{CF}\cdot\overline{GH} \doteq n$$

ſo hat man

1) $B\hat{A}C = A$
2) $A\hat{B}C = B$ u. ſ. w.

d. h. alle 101 Formeln in (167).

Der Vortheil dieſer techniſchen Form beſteht darin, daſs, wenn ich dieſe 101 Formeln oder einige von ihnen auf ein beliebiges Dreyeck anwenden will, z. B, auf XYZ, die Sache ſehr leicht wird, da man nur die Correlation der Conſtruction zwiſchen den beyden Figuren darzuſtellen, oder ihre correſpondirende Punkte zu ſuchen braucht. Soll z. B.

X dem A
Y dem B
Z dem C

entſprechen, ſo finde ich gleich aus den obigen Aequipollenzen die Punkte, welche D, H, G, F u. ſ. w. entſprechen. Der Punkt, welcher D entſpricht, iſt der, wo die Perpendikel ſich ſchneiden, wir wollen ihn V nennen, ſo entſpricht dem Punkte H,

$$\overline{XV} \cdot \overline{YZ}. \text{ u. ſ. w.}$$

So hat man bald die ganze Correlation der Conſtruction und die Anwendung der Formeln hat keine Schwierigkeiten mehr. Die Correlation der Conſtruction liegt oft tiefer verſteckt, als man glaubt, ſo daſs beyde Figuren gar keine Verbindung mit einander zu haben ſcheinen; z. B. in dem ſehr einfachen Fall der Secanten des Kreiſes (Fig. 6, 7). Das hat denn den Nachtheil, daſs man oft aus einem einzigen Satze zwey ganz verſchiedene macht.

Der Gebrauch der techniſchen Formeln verhindert nicht den Gebrauch der ordentlichen algebraiſchen, jene ſind im Gegentheil beſtimmt, die Anwendung dieſer auf beſondere Fälle zu erleichtern, wenn dieſe Fälle einer ſolchen Anwendung fähig ſind. Will

man auf eine Figur eine Formel anwenden, die für eine andere derſelben Art gefunden ward, welche merklich von ihr durch ihre Modificationen unterſchieden iſt, ſo muſs man damit anfangen zu unterſuchen, welches die ſich entſprechenden Theile in beyden ſind, um ihnen dieſelben Benennungen zu geben. Der Zweck der techniſchen Formeln iſt nun, dieſe etwas ſchwierige Operation zu erleichtern. Man fängt damit an, die Buchſtaben an der Figur ſelbſt in die Formel zu ſetzen. Sind z. B. die vier Seiten eines Vierecks $ABDC$ in der Formel durch m, n, p, q und die Winkel durch r, s, t, u bezeichnet, ſo ſetzt man dafür $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$, $B\hat{A}C$, $A\hat{B}D$, $B\hat{D}C$, $D\hat{C}A$. Dann ſtellt man die Correlation der Conſtruction für ein anderes Viereck $MNPQ$ ſo dar:

$$A, B, D, C$$
$$M, N, P, Q,$$

oder wie man ſonſt will, und erkennt den Augenblick die ſich entſprechenden Quantitäten, die im neuen Syſteme durch m, n, p, q, r, s, t, u bezeichnet werden.

Einfache Figuren kann man freylich auch ohne Correlation behandeln; ſobald die Figur aber nur etwas verwickelt wird (z. B. nur ein Viereck von der 3ten Art), ſo erfordert es ſchon viel Aufmerkſamkeit, um ſich nicht zu irren. Alles wird aber leicht, wenn man die Punkte durch die Aequipollenzen auf einander zurück führt.

Eine Figur kann oft mit ſich ſelbſt, aus einem andern Geſichtspunkte betrachtet, verglichen werden,

dann vermeidet man ſelten Verwirrung, wenn ſie nur etwas verwickelt iſt, und man eine gegebene Formel auf alle Anſichten derſelben Figur, wo es möglich iſt, anwenden will. Durch techniſche Formeln wird aber alles meiſt auf eine bloſse Verwechſelung der Buchſtaben zurückgebracht, welche die Hauptpunkte der Figur bezeichnen. Man ſehe (407).

Schlieſslich will ich nur noch bemerken, daſs die techniſchen Formeln, wie die algebraiſchen ihre Umformungen haben. Dieſe Umformungen beſtehen im Verſetzen der Buchſtaben.

Wenn z. B. 4 Linien a, b, c, d ſich in einem Punkte ſchneiden, ſo hat man

$$\overline{a}\cdot\overline{b} \mp \overline{c}\cdot\overline{d}$$

und $$\overline{a}\cdot\overline{c} \mp \overline{b}\cdot\overline{d}$$

Dieſe beyden Aequipollenzen ſagen im Grunde daſſelbe, nemlich, daſs ſich alle Linien in einem Punkte ſchneiden. Die eine iſt alſo die Folge oder Umformung der andern: d. h. trifft man in einer Rechnung die Aequipollenz

$$\overline{a}\cdot\overline{b} \mp \overline{c}\cdot\overline{d}$$

ſo kann man ſchlieſsen, daſs

$$\overline{a}\cdot\overline{c} \mp \overline{b}\cdot\overline{d}$$

alſo

Hat man die Aequipollenz $\overline{a}\cdot\overline{b} \mp \overline{c}\cdot\overline{d}$ ſo kann man den dritten Buchſtaben für

den zweyten ſetzen, ohne daſs die Aequipollenz aufhöre.

Man kann hieraus die Natur der Regeln dieſes neuen analytiſchen Mechanismus und ihre Anwendung auf andere Theile der Mathematik beurtheilen.

E n d e.

Abhandlung.

Ueber

das Verhältnifs, das zwifchen den Entfernungen von 5, willkührlich im Raume angenommenen, Punkten befteht.

Jede ebene Figur kann in Dreyecke aufgelöft, und fo die Geometrie zweyer Dimenfionen, ftreng genommen, auf blofse ebene Trigonometrie zurückgebracht werden. Allein da man diefe Dreyecke, um fie in eine Kette zu verflechten, doch noch verbinden mufs, fo hat man fchon lange den Vortheil anerkannt, den die Betrachtung eines Punktes mehr, gewährt, d. h. wenn man das Verhältnifs zwifchen 4 willkührlich in einer Ebene angenommenen Punkten unterfucht. Eben fo ift in der Geometrie dreyer Dimenfionen die Theorie der dreyeckichten Pyramiden fundamental, da jedes Polyeder in fie zerlegt werden kann, aber da man diefe Pyramiden, von denen jede 4 Scheitelpunkte hat, doch noch verbinden mufs, fo wird man nicht ohne Nutzen, um diefe Theorie vollftändig zu machen, das Verhältnifs zwifchen den Entfernungen von 5 im Raum angenommenen Punkten betrachten. Der Entfernungen zwifchen diefen Punkten, wenn man immer 2 vergleicht, find 10, und es fällt in die Augen, dafs, wenn 9 bekannt find, die 10te beftimmt

ſeyn muſs, und in Werthen der 9 andern ausgedrückt werden kann.

Dieſe Aufgabe behandele ich hier. Um zur Auflöſung zu gelangen, muſs ich einige vorläufige Unterſuchungen anſtellen, von denen manche ſchon an und für ſich viel Intereſſe haben, z. B. die folgende:

Wenn die Kanten einer dreyeckichten Pyramide gegeben ſind, durch ſie alles, was man bey der Pyramide betrachten kann, z. B. Winkel, körperlichen Inhalt, umſchriebene Kugel u. ſ. w. zu beſtimmen.

Aus ihr fliefst die Auflöſung folgender Fundamentalaufgabe für die Geometrie dreyer Dimenſionen (eben das, was das Problem der Trigonometrie für die Geometrie zweyer Dimenſionen iſt).

Wenn von den Stücken, die zur Conſtruction einer dreyeckichten Pyramide gehören, 6 zur Beſtimmung der übrigen hinreichende gegeben ſind, dieſe übrigen zu finden.

Die weſentlichſten Anwendungen dieſes Problem's würden ein groſses Werk bilden (das ich für ſehr nützlich halte), aber ich darf mich hier nur inſofern dabey aufhalten als es nöthig iſt, um zu dem mir vorgeſteckten Ziele zu gelangen.

Mehrere der hier vereinigten Aufgaben ſind ſchon von andern aufgelöſt, vorzüglich von Euler in den Petersburger, von Lagrange in den Berliner (1773.), und von Gua in den Pariſer Memoiren (1783.); aber ich habe von allen dieſen Aufgaben nur die kleine Zahl der nöthigſten behalten, um nicht das Ganze meiner Arbeit zu unterbrechen, und ſie ſo behan-

delt, wie es meine Abſicht erforderte, die von dem Zwecke jener Geometer ganz verſchieden war. Lagrange's Abhandlung enthält die ausgedehnteſten Unterſuchungen, aber er ſucht nicht wie ich hier, den entwickelten Ausdruck aller Theile der Pyramide in Werthen der Kanten zu finden, und die allgemein oben angeführte Aufgabe zu löſen, ſondern er zeigt nur, indem er auf die Pyramide die Methode der Coordinaten und Projectionen anwendet, wie viel die Analyſis, geſchickt behandelt, vermag.

Ich habe alle meine Aufgaben durch bloſse ebene und ſphäriſche Trigonometrie aufgelöſt; doch um meine Arbeit vollſtändig zu machen, habe ich in wenig Worten gezeigt, wie dieſe Methode mit der Methode der Projectionen zuſammenhängt.

Bey dieſer Gelegenheit habe ich auf eine neue, und wie ich glaube, einfache Art, die allgemeine Aufgabe der Verwandlung der Coordinaten im Raum aufgelöſt, d. h. unter der Vorausſetzung, daſs die 6 Coordinaten (alte und neue) mit einander beliebige Winkel machen.

Um dem Gedächtniſs zu Hülfe zu kommen, ſchicke ich einige bekannte Sätze voraus.

I.

In einem gradlinigten Dreyecke, deſſen Winkel A, B, C ihnen gegenüberſtehende Seiten a, b, c ſind, hat man (I. Band p. 312 ſq.)

1) ... $cof.\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

2) ... $\sin A = \frac{1}{2bc} \sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$

3) das

3) das Perpendikel aus dem Winkel A auf die gegenüberſtehende Seite $= \frac{1}{2a} r (2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$

4) der Flächeninhalt des Dreyecks $= \frac{1}{4} r (2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$

5) der Radius des umſchriebenen Kreiſes $= \frac{abc}{r (2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$

6) der Radius des eingeſchriebenen Kreiſes $= \frac{1}{2} r \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a+b+c}$

II.

In einem ſphäriſchen Dreyecke hat man

1) . . . . $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$

2) . . . . $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$

3) der Sinus des Bogens, der ſenkrecht aus dem Winkel A auf die gegenüberſtehende Seite herabgelaſſen iſt $= \frac{1}{\sin a} r (1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c)$

III.

Wenn 3 Winkel A, B, C zuſammen den ganzen Umkreis ausmachen, oder wenn einer, z. B. $A =$ der Summe oder der Differenz der beyden andern iſt, ſo hat man folgende Formel:

$1 - \cos A^2 - \cos B^2 - \cos C^2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$

Machen die 3 Winkel einen halben Umkreis aus, ſo hat man

$1 - \cos A^2 - \cos B^2 - \cos C^2 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$

Machen die 3 Winkel nur einen rechten aus, so erhält man

$$1 \sin A^2 - \sin B^2 - \sin C^2 - 2 \sin A . \sin B . \sin C = 0$$

Wegen der Bezeichnung der Winkel verweise ich auf (Th. I. p. 169 fg.).

Aufgabe I.

1. Wenn von den 6 graden Linien, die 4 in einer Ebene angenommene Punkte zu zweyen verbinden, 5 gegeben sind, die 6te in Werthen dieser 5 zu finden.

Auflösung.

(Fig. 1.) B, C, D, E seyen die 4 Punkte, und 5 von den 6 Linien $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ sollen gegeben seyn.

Der Kürze wegen sey

$$\overline{BC} = m$$
$$\overline{CD} = n$$
$$\overline{BD} = p$$
$$\overline{BE} = q$$
$$\overline{CE} = r$$
$$\overline{DE} = s$$

2. Weil nun unter den 3 Winkeln $\hat{CBD}$, $\hat{CBE}$, $\hat{DBE}$ einer ist, der die Summe der beyden andern ausmacht, so hat man

$$1 - \cos \hat{CBD}^2 - \cos \hat{DBE}^2 - \cos \hat{CBE}^2 + 2 \cos \hat{CBD} . \cos \hat{CBE} . \cos \hat{DBE} = 0 \ldots \text{(A)}$$

aber wir haben auch folgende 3 Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} cof\, C\hat{B}D &= \frac{m^2 + p^2 - n^2}{2mp} \\ cof\, C\hat{B}E &= \frac{m^2 + q^2 - r^2}{2mq} \\ cof\, D\hat{B}E &= \frac{p^2 + q^2 - s^2}{2pq} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (B)$$

Subſtituirt man dieſe Werthe zu der Gleichung (A) und reducirt, ſo erhält man folgende Formel, die der Aufgabe genug thut:

$$\left.\begin{aligned} &m^4s^2 + s^4m^2 + n^4q^2 + q^4n^2 + p^4r^2 + r^4p^2 \\ &+ m^2n^2p^2 + m^2q^2r^2 + n^2r^2s^2 + p^2q^2s^2 \\ &- m^2n^2q^2 - m^2n^2r^2 - n^2s^2q^2 - s^2q^2m^2 \\ &- m^2r^2s^2 - m^2p^2s^2 - p^2m^2r^2 - p^2s^2r^2 \\ &- n^2r^2q^2 - n^2p^2q^2 - p^2q^2r^2 - p^2n^2r^2 \end{aligned}\right\} = o$$

3. Dieſe Formel drückt das Verhältniſs zwiſchen den Entfernungen von 4 zu einer Ebene genommenen Punkten aus; oder was auf daſſelbe herauskommt, zwiſchen den 4 Seiten und 2 Diagonalen eines ebenen Vierecks. Sie iſt, wie man ſieht, zwiſchen den 6 Gröſsen, m, n, p, q, r, s ſymmetriſch, und da eine jede dann nur in der 2ten und 4ten Potenz vorkommt, läſst ſie ſich wie die Gleichungen vom 2ten Grade behandeln.

Aufgabe II.

4. Die Höhe einer dreyeckichten Pyramide aus ihren 6 Kanten zu finden.

Auflöſung.

Es ſey $ABCD$ (Fig. 2.) die Pyramide, A der Scheitel, $\overline{AE}$ ihre Höhe, man ſoll alſo $\overline{AE}$ in

Werthen von $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, finden.

5. Von dem Fufse des Perpendikels ziehe ich zu den Winkeln der Grundlinie, B, C, D, die 3 Linien $\overline{EB}$, $\overline{EC}$, $\overline{ED}$, und ich bezeichne

$$\overline{AD} = f$$
$$\overline{AB} = g$$
$$\overline{AC} = h$$
$$\overline{BC} = m$$
$$\overline{CD} = n$$
$$\overline{DB} = p$$
$$\overline{EB} = q$$
$$\overline{EC} = r$$
$$\overline{ED} = s$$

6. Die gefuchte Höhe AE nenne ich x. Da ich nun für das Viereck $BCDE$ diefelben Benennungen wie zu der vorigen Aufgabe behalten habe (Fig. 3.), fo wird die Formel (C) diefer Aufgabe auf den vorliegenden Fall anwendbar feyn. Um q, r, s zu eliminiren, haben wir die 3 Gleichungen

$$qq = gg - xx$$
$$rr = hh - xx$$
$$ss = ff - xx$$

Subftituiren wir diefe Werthe, fo erhalten wir folgende Formel, die der Aufgabe Genüge leiftet:

$$\begin{aligned} &xx(2m^2n^2 + m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) \\ &+f^4m^2 + m^4f^2 + g^4n^2 + n^4g^2 + h^4p^2 + p^4h^2 \\ &+ m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2 \\ &- m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2 \\ &- m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2 \\ &- n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2 = 0 \ldots\ldots (A) \end{aligned}$$

7. Da die Formel (A) die 7 Quantitäten m, n, p, f, g, h, x enthält, ſo ſieht man, daſs ſie folgende allgemeine Aufgabe auflöſt:

Wenn von den 6 Kanten und der Höhe einer dreyeckten Pyramide 6 gegeben ſind, die 7te zu finden.

8. Wenn die 3 aufſteigenden Kanten f, g, h einander gleich ſind, ſo wird die Formel

$$(ff - xx)\{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\} - m^2n^2p^2 = o \ldots \text{(B)}$$

was auch ſonſt leicht zu ſehen iſt, denn da

$$ff - xx = ss = rr = qq$$

weil

$$f = g = h$$

ſo ſind s, r, q, 3 Halbmeſſer eines Kreiſes, der um die Grundfläche BCD beſchrieben iſt, nach dem erſten Lemma hat man

$$ss(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\} - m^2n^2p^2 = o$$

welches die Formel (B) iſt.

Sollen auch die 3 Seiten der Grundfläche, m, n, p, einander gleich ſeyn, ſo wird die Formel (B)

$$xx = ff - \tfrac{1}{3}mm \ldots\ldots \text{(C)}$$

und iſt $f = m$, ſo hat man

$$xx = \tfrac{2}{3}mm \ldots\ldots \text{(D)}$$

welches der Fall bey dem regulären Tetraëder iſt.

Aufgabe II°.

Wenn die 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide gegeben ſind, den Werth einer Linie zu finden, die vom Scheitel zu irgend einem gegebenen Punkt der Grundlinie gezogen wird.

Die Entfernung des gegebenen Punktes vom Winkel B ſey p', und vom Winkel C, n'. Man hat alſo eine neue Pyramide, deren Grundfläche die Kanten m, q', r' hat, und deren aufſteigende Kanten g, h, x ſind, wo x die geſuchte Linie bedeutet. Die neue Pyramide hat einerley Höhe mit der vorigen. Berechnet man alſo ihre Höhe aus den Kanten, und ſetzt ſie der Höhe der vorigen gleich, ſo erhält man eine Endgleichung für x vom 4ten Grade, die wie eine quadratiſche aufgelöſet wird. Iſt die Höhe der Pyramide $= \xi$, und bekannt, da ſie der Höhe der vorigen gleich iſt, ſo haben wir

$$\begin{aligned}
&\xi\xi(2m^2n'^2 + 2m^2p'^2 + 2n'^2p'^2 - m^4 - n'^4 - p'^4)\\
&+ x^4m^2 + m^4x^2 + g^4n'^2 + n'^4g^2 + h^4p'^2 + p'^4h^2\\
&+ m^2n'^2p'^2 + m^2g^2h^2 + n'^2h^2x^2 + p'^2g^2x^2\\
&- m^2n'^2x^2 - m^2n'^2g^2 - m^2g^2x^2 - m^2h^2x^2\\
&- m^2p'^2x^2 - m^2p'^2h^2 - n'^2g^2x^2 - n'^2g^2h^2\\
&- n'^2p'^2g^2 - n'^2p'^2h^2 - p'^2g^2h^2 - p'^2h^2x^2 = o
\end{aligned}$$

Aufgabe III.

9. Den körperlichen Inhalt einer dreyeckichten Pyramide in Werthen ihrer 6 Kanten zu finden.

Es ſey (Fig. 4.) wie vorher

m, n, p, die 3 Kanten der Grundfläche;

f, g, h, die 3 aufſteigenden reſpective gegenüberſtehenden Kanten;

x die Höhe der Pyramide über der Grundfläche BCD;

S der geſuchte körperliche Inhalt,

ſo haben wir

$$S = \tfrac{1}{3}x \,.\, BCD$$

Nun iſt nach Lemma 1

$$BCD = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4)}$$

Subſtituirt man dieſen Werth in die erſte Gleichung quadrirt, und ſubſtituirt dann den Werth von xx aus der Formel (A) der vorigen Aufgabe, ſo erhält man folgende Formel, die der Aufgabe Gnüge leiſtet

$$\begin{aligned} 9 \,.\, 16\, SS &+ f^4m^2 + m^4f^2 + g^4n^2 + n^4g^2 + h^4p^2 + p^4h^2 \\ &+ m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2 \\ &- m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2 \\ &- m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2 \\ &- n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2 = 0 \end{aligned}$$

. . . . (A)

10. Weil die Formel (A) die 7 Quantitäten m, n, p, f, g, h, S enthält, ſo löſt ſie offenbar folgende allgemeinere Aufgabe auf:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und ihrem körperlichen Inhalte irgend 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

11. Sollen die 3 aufſteigenden Kanten f, g, h gleich ſeyn, ſo wird die Formel

$$\begin{aligned} 9 \,.\, 16\, SS = ff(&2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) \\ &- m^2n^2p^2 \ . \ . \ . \quad (B) \end{aligned}$$

Sind auch die 3 Kanten der Grundfläche m, n, p gleich, so wird die Formel (B)

$$9 \cdot 16\, SS = 3ffm^4 - m^6 \ldots . \qquad (C)$$

Ist auch $f = m$, wie bey dem regulären Tetraëder, so hat man

$$S = \frac{1}{6\sqrt{2}} m^3 \ldots . \qquad (D)$$

Aufgabe IV.

12. Den Halbmesser einer um die dreyeckte Pyramide beschriebenen Kugel, in Werthen der Kanten auszudrücken.

Es seyen

m, p, n, die 3 Kanten der Grundfläche;
f, g, h, die 3 aufsteigenden Kanten;
S der körperliche Inhalt;
R der Halbmesser der umschriebenen Kugel.

Stellt man sich vom Mittelpunkte dieser Kugel Linien in die 4 Winkel der Pyramide gezogen vor, so werden diese Linien (welches die gesuchten Halbmesser sind), die Pyramide in 4 andere zerlegen, deren körperlichen Inhalt man durch die Formel (11, B) findet. Setzt man den Inhalt dieser 4 Pyramiden dem Inhalte des ganzen gleich, den man aus (11, A) findet, so hat man nach Reductionen folgende Formel:

$$4RR\,(f^2m^2+m^4f^2+g^4n^2+n^4g^2+h^4p^2+p^4h^2$$
$$+m^2g^2h^2+p^2f^2g^2+n^2f^2h^2+m^2n^2p^2$$
$$-m^2n^2g^2-n^2p^2g^2-n^2f^2g^2-m^2f^2g^2$$
$$-n^2g^2h^2-p^2g^2h^2-m^2n^2f^2-m^2p^2f^2$$
$$-n^2p^2h^2-m^2p^2h^2-m^2f^2h^2-p^2f^2h^2)$$
$$+2n^2p^2g^2h^2+2m^2p^2f^2h^2+2m^2n^2f^2g^2$$
$$-m^4f^4-g^4n^4-h^4p^4=0\ldots\ldots \quad (A)$$

13. Die Formel (A) löst offenbar folgende Aufgabe auf:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und dem Halbmesser der umschriebenen Kugel, irgend 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

14. Sind alle Kanten gleich wie bey dem regulären Tetraëder, und bezeichnet man mit m eine von ihnen, so ist

$$R=m\sqrt{\left(\tfrac{3}{8}\right)} \ldots\ldots \quad (B)$$

Aufgabe V.

15. **Den Halbmesser der einer dreyeckten Pyramide eingeschriebenen Kugel in Werthen der 6 Kanten zu finden.**

Es sey (Fig. 4.)

m, n, p, die 3 Kanten der Grundfläche;

f, g, h, die 3 aufsteigenden respective gegenüberstehenden Kanten;

S der körperliche Inhalt der Pyramide;

r der gesuchte Halbmesser der eingeschriebenen Kugel.

Durch Linien aus dem Mittelpunkt dieſer Kugel in die 4 Winkel der Pyramide gezogen, wird ſie in 4 kleinere zerlegt. Man hat alſo

$$S = \tfrac{1}{3} r\,(BCD + ABC + ABD + ACD) \;\ldots\; (A)$$

Durch das Lemma I. haben wir aber BCD, ABC, u. ſ. w., und durch Aufgabe III. (9) auch S. Subſtituiren wir dieſe Werthe, ſo entſteht

$$\begin{aligned} & r\,\Gamma(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) \\ & \quad + \Gamma(2g^2h^2 + 2g^2m^2 + 2h^2m^2 - g^4 - h^4 - m^4) \\ & + \Gamma(2f^2g^2 + f^2p^2 + 2g^2p^2 - f^4 - g^4 - p^4) + \Gamma(2f^2h^2 \\ & \quad + 2f^2n^2 + 2h^2n^2 - f^4 - h^4 - n^4) \\ & = \Gamma(m^2n^2f^2 + m^2n^2g^2 + m^2f^2g^2 + m^2f^2h^2 + m^2p^2f^2 \\ & \quad + m^2p^2h^2 + n^2f^2g^2 + n^2g^2h^2) \\ & + n^2p^2g^2 + n^2p^2h^2 + p^2g^2h^2 + p^2f^2h^2 - f^4m^2 - m^4f^2 \\ & \quad - g^4n^2 - n^4g^2 - h^4p^2 - p^4h^2 \\ & - m^2g^2h^2 - n^2f^2h^2 - p^2f^2g^2 - m^2n^2p^2) \;\ldots\; (B) \end{aligned}$$

16. Lagrange bemerkt, daſs es auſser der eingeſchriebenen Kugel noch 4 andere gebe, die eben ſo wohl die 4 Seitenflächen der Pyramide berühren, aber daſs dann immer eine dieſer 4 Seitenflächen äuſserlich von der Kugel berührt wird. Man kann ſo leicht den Halbmeſſer dieſer 4 neuen Kugeln finden, denn man braucht nur die Seitenfläche, welche äuſserlich von der Kugel berührt wird, als negativ zu betrachten, d. h. den Wurzelgröſsen, welche ſie ausdrücken, das Zeichen — zu geben. Will man z. B. den Halbmeſſer der Kugel finden, die innerlich die 3 Seitenflächen ABC, ABD, ACD berührt, und äuſserlich BCD, ſo braucht man nur in vorſtehender Formel (B) der Wurzelgröſse

$$\Gamma(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4)$$

das Zeichen — zu geben.

17. Durch die Formel (B) wird folgende allgemeine Aufgabe gelöſt:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und dem Halbmeſſer der eingeſchriebenen Kugel 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

18. Bey dem regulären Tetraëder hat man

$$r = m\sqrt{(\tfrac{1}{24})} \ldots . \qquad (C)$$

Aufgabe VI.

19. Die Entfernungen der Perpendikel einer dreyeckichten Pyramide, d. h. die Entfernung des Punktes, wo ein Perpendikel die Fläche, auf die es fällt, ſchneidet, von jedem Winkel eben dieſelbe Fläche anzugeben.

Es ſeyen (Fig. 4.)

m, n, p, die 3 Kanten der Grundfläche;

f, g, h, die 3 aufſteigenden gegenüberſtehenden Kanten;

x die Höhe des Scheitels A über die Fläche BCD;

$\overline{BE}$ die geſuchte Entfernung des Perpendikels,

ſo hat man

$$\overline{BE}^2 = gg - xx$$

Subſtituirt man hier den (6) gefundenen Werth von xx, ſo hat man folgende Formel, die der Aufgabe Gnüge thut:

$$\overline{BE}^2\{2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4\} =$$
$$2m^2p^2g^2+g^2m^2n^2+g^2n^2p^2-m^4g^2-p^4g^2$$
$$+f^4m^2+m^4f^2+g^4n^2+p^4h^2+h^4p^2$$
$$+m^2n^2p^2+m^2p^2h^2+n^2f^2h^2+p^2f^2g^2$$
$$-m^2n^2f^2-m^2n^2g^2-m^2f^2g^2-m^2f^2h^2$$
$$-m^2p^2f^2-m^2p^2h^2-n^2f^2g^2-n^2g^2h^2$$
$$-n^2p^2h^2-p^2g^2h^2-p^2f^2h^2 \ldots . \quad (A)$$

20. Die Formel (A) löst folgende allgemeine Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und einer der 12 Entfernungen der Perpendikel, 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

Aufgabe VII.

21. Die Entfernung des Fusses eines Perpendikels in der dreyeckichten Pyramide, von den 3 Kanten der Fläche, auf der es steht, in Werthen der 6 Kanten zu finden.

Es seyen wie vorher (Fig. 5.)

m, n, p, die 3 Kanten der Grundfläche;

f, g, h, die 3 aufsteigenden gegenüberstehenden Kanten;

x das Perpendikel aus A auf BCD;

$\overline{EF}$ die gesuchte Entfernung des Fusses des Perpendikels von $\overline{BC}$.

Aus A ziehe ich $\overline{AF}$. So habe ich durch das erste Lemma den Werth von $\overline{AF}$, die senkrecht auf $\overline{BC}$ steht, und durch die zweyte Aufgabe (6) AE oder x. Subsituire ich diese Werthe von $\overline{AF}$ und x in der Gleichung

$$\overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 - xx$$

ſo haben wir folgende Formel, die der Aufgabe Genüge leiſtet.

$$\overline{EF}^2\{2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4\} =$$

$$\frac{1}{4mnm}\Big\{2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4\Big\}$$
$$\{2g^2h^2+2g^2m^2+2h^2m^2-g^4-h^4-m^4\}$$
$$+m^4f^2+f^4m^2+n^4g^2+g^4n^2+p^4h^2+h^4p^2$$
$$+n^2n^2p^2+m^2g^2h^2+n^2f^2h^2+p^2f^2g^2$$
$$-m^2n^2f^2-m^2n^2g^2-m^2f^2g^2-m^2f^2h^2-m^2p^2f^2$$
$$-m^2p^2h^2$$
$$-n^2f^2g^2-n^2g^2h^2-n^2p^2g^2-p^2g^2h^2-p^2h^2f^2 \ldots . \text{(A)}$$

22. Die Formel (A) löſt folgende allgemeine Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und der Entfernung des Fuſses eines der Perpendikel von den Seiten der Fläche, auf der es ſteht, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe VIII.

23. Die Entfernung jedes Scheitelpunkts vom Schwerpunkt der dreyeckichten Pyramide in Werthen der 6 Kanten auszudrücken.

Es ſeyen (Fig. 4.)

m, n, p, die 3 Kanten der Grundfläche;

f, g, h, die auffteigenden Kanten;

y . . . . die geſuchte Entfernung des Scheitels A vom Schwerpunkt.

Nach den bekannten Lehrſätzen vom Schwerpunkt hat man

$$yy = 4(ff+gg+hh) - \frac{(mm+nn+pp+ff+gg+hh)}{16}$$

oder nach Reduction

$$16yy = 3(ff+gg+hh) - (mm+nn+pp) \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

24. Die Formel (A) löſt die allgemeine Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und der Entfernung eines Scheitelpunktes vom Schwerpunkt, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe IX.

25. In Werthen der Kanten einer dreyeckichten Pyramide, alle Winkel, die durch dieſe Kanten zu zweyen an den Scheitelpunkten gebildet werden, auszudrücken.

Es ſeyen (Fig. 4.)

m, n, p, die 3 Kanten der Grundfläche;

f, g, h, die 3 aufſteigenden Kanten;

$B\hat{A}C$ oder $\hat{gh}$ einer der geſuchten Winkel.

Da $\hat{gh}$ ein Winkel des Dreyecks ABC iſt, ſo hat man nach dem erſten Lemma, ohne daſs f, n, p, den Werth mit beſtimmen,

$$\cos\hat{gh} = \frac{gg+hh-mm}{2gh} \qquad \text{(A)}$$

Eben ſo ſind die Formeln für jeden der 11 übrigen Winkel.

26. Aus der Formel (A) folgt

$$\left.\begin{array}{l} 2gh \,.\, cos\hat{gh} = gg + hh - mm \\ 2fg \,.\, cos\hat{fg} = ff + gg - pp \\ 2fh \,.\, cos\hat{fh} = ff + hh - nn \end{array}\right\} \ldots\ldots (B)$$

Addirt man dieſe Gleichungen, ſo hat man

$$2gh \,.\, cos\hat{gh} + 2fg\, cos\hat{fg} + 2fh\, cos\hat{fh} = 2ff + 2gg + 2hh - mm - nn - pp \ldots (C)$$

Vergleicht man dieſe Formel mit der der vorigen Aufgabe und zieht die eine von der andern ab, ſo kommt

$$16xy = ff + gg + hh + 2gh\, cos\hat{gh} + 2fg\, cos\hat{fg} + 2fh\, cos\hat{fh} \ldots\ldots (D)$$

wodurch folgende Aufgabe gelöſet wird:

Wenn in einer dreyeckichten Pyramide von den 3 Kanten, die von einem Scheitelpunkt ausgehen, den 3 Winkeln, die von dieſen Kanten zu zweyen gebildet werden, und der Entfernung dieſes Scheitelpunktes vom Schwerpunkte 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe X.

27. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide den Winkel auszudrücken, der durch 2 reſpective gegenüberſtehende Kanten gebildet wird, d. h. (weil ſie nicht in einer Ebene ſind) den Winkel, welchen mit einer von ihnen die Linie machen würde, die aus einem be-

liebigen Punkte der erſtern parallel mit der andern gezogen iſt.

Wir wollen z. B. indem wir (Fig. 4.) die vorigen Bezeichnungen beybehalten, den Winkel ſuchen, den g und n bilden (g und n, h und p, f und m ſind die einander gegenüberſtehenden Kanten), d. h. den Winkel, den eine durch den Punkt B parallel mit n gezogene Linie, mit g bildet.

Um die Figur deutlicher zu machen, wollen wir ſie von neuem beſchreiben (Fig. 6.) Es ſey $\overline{BO}$ parallel mit $\overline{CD}$.

Wir wollen uns die Oberfläche einer Kugel vorſtellen, deren Mittelpunkt in B iſt, und die in den Punkten a, o, d, c, von den Linien $\overline{BA}$, $\overline{BO}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ geſchnitten wird. Die Ebenen, in denen je zwey dieſer Linien liegen, bilden auf der Kugeloberfläche ein ſphäriſches Dreyeck ado, das mit dem erſteren acd, in c einen Winkel gemein hat. Wir haben alſo nach dem 2ten Lemma

$$cof\,\hat{acd} = \frac{cof\,ad - cof\,ac \,.\, cof\,cd}{fin\,ac \,.\, fin\,cd}$$

$$cof\,\hat{acd} = \frac{cof\,ao - cof\,ac \,.\, cof\,co}{fin\,ac \,.\, fin\,co}$$

daraus

$$(cof\,ao - cof\,ac \,.\, cof\,co)\,fin\,cd = (cof\,ad - cof\,ac \,.\, cof\,cd)\,fin\,co \quad \ldots\ (A)$$

aber

$$ac = \hat{ABC}$$
$$co = \hat{OBC} = fuppl \,.\, \hat{BCD}$$
$$cd = \hat{CBD}$$
$$ad = \hat{ABD}$$

Nun,

Nun ſind alle dieſe Winkel bekannt und leicht in Werthen der Kanten auszudrücken, es iſt alſo in der Gleichung (A) nichts unbekannt als der geſuchte Bogen *ao* das Maaſs des geſuchten Winkels $\widehat{BACD}$

Die vorige Gleichung wird folglich

$$(cof\, g\hat{}n + cof\, A\hat{B}C \,.\, cof\, B\hat{C}D) \, fin\, C\hat{B}D = (cof\, A\hat{B}D - cof\, A\hat{B}C \,.\, cof\, C\hat{B}D) \, fin\, B\hat{C}D \quad \ldots \text{(B)}$$

Da wir aber $g\hat{}n$ in Werthen der Kanten haben wollen, ſo drücken wir darin $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ u. ſ. w. vermöge des erſten Lemma aus.

Es iſt alſo (Fig. 3.)

$$cof\, A\hat{B}C = \frac{gg + mm - hh}{2gm}$$

$$cof\, B\hat{C}D = \frac{mm + nn - pp}{2mn}$$

$$fin\, B\hat{C}D = \frac{1}{2mn}\sqrt{\{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\}}$$

$$cof\, A\hat{B}D = \frac{gg + pp - ff}{2gp}$$

$$cof\, C\hat{B}D = \frac{mm + pp - nn}{2mp}$$

$$fin\, C\hat{B}D = \frac{1}{2mp}\sqrt{\{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\}}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in (B), ſo erhalten wir folgende Formel:

$$2gn\, cof\, g\hat{}n = hh + pp - ff - mm \quad \ldots \text{(C)}$$

28. Die Formel löſet folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und einem der 3 Winkel, welche durch die gegenüberſtehenden Kanten gebildet werden, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

29. Wendet man die Formel auf die andern gegenüberſtehenden Kanten $m, f,$ und p, h an, ſo hat man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 2gn \,.\, cof\hat{}n = hh + pp - ff - mm \\ 2fm \,.\, cof\hat{}m = gg + nn - hh - pp \\ 2hp \,.\, cof\hat{}p = ff + mm - gg - nn \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(D)}$$

Addirt man, ſo entſteht folgende merkwürdige ſymmetriſche Formel:

$$fm \,.\, cof\hat{}m + gn \,.\, cof\hat{}n + hp \,.\, cof\hat{}p = o \ldots\ldots \text{(E)}$$

30. Man kann noch bemerken, daſs, wenn man die Höhe der Pyramide $= o$ ſetzt, ſie zu einem ebenen Viereck wird, auf das auch die Formeln anwendbar ſind (Fig. 3.). Sie werden dann

$$\left.\begin{array}{l} 2ms \,.\, cof\hat{}s = qq + nn - rr - pp \\ 2nq \,.\, cof\hat{}q = rr + pp - ss - mm \\ 2pr \,.\, cof\hat{}r = ss + mm - qq - nn \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(F)}$$

Hier giebt die letzte Formel, z. B. die Auflöſung der Aufgabe:

> Wenn die 4 Seiten eines ebenen Vierecks, und der Winkel zwiſchen beyden Diagonalen gegeben iſt, dieſe beyden Diagonalen zu finden;

man braucht ſie nur mit der Formel (C) der Aufgabe I. (5) zu verbinden.

Eben ſo würde man dieſe Aufgabe löſen:

> Wenn man den Inhalt eines ebenen Vierecks und ſeine 4 Seiten kennt, die beyden Diagonalen zu finden.

Nennen wir den Inhalt a, ſo haben wir bekanntlich

$$\tfrac{1}{2} pr \,.\, ſin\, p\hat{}r = a$$

Dividirt man dieſe Formel durch die letzte der Formeln (F), ſo kommt

$$\text{cotang } p\hat{}r = \frac{ss + mm - qq - nn}{4aa}$$

Da man nun den Winkel $p\hat{}r$ kennt, ſo kommt die Aufgabe auf die erſte zurück.

Aufgabe XI.

31. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide alle Winkel auszudrücken, die durch zwey Seitenflächen gebildet werden.

Es ſeyen wie vorher (Fig. 5.)

$m, n, p,$ die 3 Kanten der Grundfläche;

$f, g, h,$ die 3 gegenüberſtehenden aufſteigenden Kanten;

x .... die Höhe des Scheitels A über der Grundfläche BCD.

$A\hat{F}E$ iſt offenbar der Winkel, den die Seitenflächen ABC, BCD, deren Durchſchnitt $\overline{BC}$ iſt, mit einander bilden.

Man hat

$$\overline{AF} \cdot \sin A\hat{F}E = x$$

Die Aufgabe II. (6) giebt x, das erſte Lemma AF, ſubſtituirt man alſo ihre Werthe, ſo entſteht folgende Formel:

$$\begin{aligned}\sin A\hat{F}E \{ &2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\} \\ &\{2g^2h^2 + 2g^2m^2 + 2h^2m^2 - g^4 - h^4 - m^4\} \\ +4m^2\{ &m^4f^2 + f^4m^2 + n^4g^2 + g^4n^2 + p^4h^2 + h^4p^2 \\ &+ m^2n^2p^2 \\ + &m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2 - m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 \\ &- m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2 \\ -m^2p^2f^2 &- m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2 - n^2p^2g^2 \\ &- n^2p^2h - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2\} = o \ldots (A)\end{aligned}$$

32. Diese Formel löset folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und dem Winkel, den 2 Seitenflächen bilden, 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

Aufgabe XII.

33. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide die 12 Neigungswinkel dieser Kanten auf den Seitenflächen auszudrücken.

Ich behalte die Benennungen der vorigen Aufgabe und suche z. B. den Winkel $\hat{ABE}$ (Fig. 5.), welches der Neigungswinkel der Kante $\overline{AB}$ auf der Seitenfläche BCD ist.

Substituirt man in

$$g \,.\, \sin \hat{ABE} = x$$

für x den Werth, den die Formel (A) der Aufgabe II. (6) giebt, so entsteht folgende Formel:

$$\begin{aligned}\sin \hat{ABE}^2 \,.\, gg\{&2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4\}\\ &+m^4f^2+f^4m^2+n^4g^2+g^4n^2+p^4h^2+h^4p^2\\ &+m^2n^2p^2+m^2g^2h^2+n^2f^2h^2+p^2g^2f^2\\ &-m^2n^2f^2-m^2n^2g^2-m^2g^2f^2-m^2h^2f^2\\ &-m^2p^2f^2-m^2p^2h^2-n^2g^2f^2-n^2g^2h^2\\ &-n^2p^2g^2-n^2p^2h^2-p^2g^2h^2-p^2h^2f^2=0 \ldots (A)\end{aligned}$$

34. Die Formel löset folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und dem Neigungs-

winkel einer Kante auf einer Seitenfläche, die sie trifft, 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

Aufgabe XIII.

35. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide die 12 Winkel auszudrücken, welche diese Kanten mit den anliegenden Perpendikeln bilden.

Wir behalten die vorigen Benennungen, und suchen z. B. den Winkel $B\hat{A}E$, welchen die Kante $\overline{AB}$ mit dem anliegenden Perpendikel $\overline{AE}$ bildet.

Substituirt man in

$$g \cdot cos B\hat{A}E = x$$

für x den in der Formel (A) der Aufgabe (II, 6) gefundenen Werth, so entsteht folgende Formel:

$$\begin{aligned} cos B\hat{A}E \cdot gg \{ &2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4\} \\ &+m^4f^2+f^4m^2+n^4g^2+g^4n^2+p^4h^2+h^4p^2 \\ &+m^2n^2p^2+m^2g^2h^2+n^2h^2f^2+p^2g^2f^2 \\ &-m^2n^2f^2-m^2n^2g^2-m^2g^2f^2-m^2h^2f^2 \\ &-m^2p^2f^2-m^2p^2h^2-n^2g^2f^2-n^2g^2h^2 \\ &-n^2p^2g^2-n^2p^2h^2-p^2g^2h^2-p^2h^2f^2=0 \ldots (A) \end{aligned}$$

36. Die Formel (A) löset folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und einem der 12 Winkel, den diese Kanten mit den anliegenden Perpendikeln machen, 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

Aufgabe XIV.

37. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide die Winkel auszudrücken, welche jedes Perpendikel mit den anliegenden Seiten macht.

Wir behalten die vorigen Bezeichnungen, und ſuchen z. B. die Winkel $FÂE$, den das Perpendikel $\overline{AE}$ mit der Seitenfläche ABC macht.

Offenbar iſt

$$\overline{AF} \cdot \cos FÂE = \overline{AE}$$

Subſtituirt man hier für $\overline{AE}$ den Werth aus der Gleichung (A) der Aufgabe (II, 6) und für $\overline{AF}$ den aus dem erſten Lemma gezogenen Werth, ſo erhalten wir:

$$\begin{aligned}\cos FÂE \{&2g^2h^2 + 2g^2m^2 + 2h^2m^2 - g^4 - h^4 - m^4\}\\ &\{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\}\\ &+ 4mm\,(m^4f^2 + f^4m^2 + n^4g^2 + g^4n^2 + p^4h^2 + h^4p^2)\\ &+ m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2h^2f^2 + p^2g^2f^2\\ &- m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2g^2f^2 - m^2h^2f^2\\ &- n^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2g^2f^2 - n^2g^2h^2\\ &- n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2h^2f^2 = o \quad \ldots\ (A)\end{aligned}$$

38. Die Formel löſet folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und einem der 12 Winkel, welche die Perpendikel und die anliegenden Seiten bilden, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe XV.

39. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide alle Winkel auszudrücken, welche von den Entfernungen der Perpendikel (ſiehe 19.) gebildet werden.

Wir behalten die vorigen Benennungen und ſuchen z. B. den Winkel $B\hat{E}C$, den die beyden Entfernungen der Perpendikel (Fig. 5.), $\overline{EB}$, $\overline{EC}$, bilden.

Das erſte Lemma giebt

$$cof B\hat{E}C = \frac{\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 - \overline{BC}^2}{2 \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CE}}$$

aber man hat

$$\overline{BE}^2 = gg - xx$$
$$\overline{CE}^2 = hh - xx$$
$$\overline{BC}^2 = m$$

alſo wird die vorige Gleichung

$$cof B\hat{E}C = \frac{gg + hh - mm - 2xx}{2\sqrt{(gg-xx)(hh-xx)}} \quad \ldots\ldots (A)$$

eine Formel, worin man nur für x noch den Werth aus der Formel (A) der Aufgabe (II, 6) zu ſubſtituiren braucht.

40. Die Formel löſet die allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und dem Winkel, den 2 Entfernungen der Perpendikel machen, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe XVI.

41. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, die kürzeſte Entfernung zweyer gegenüberſtehenden Kanten, d. h. die Linie zu finden, die auf beyden ſenkrecht ſteht.

Ich behalte die Benennungen der vorigen Aufgaben, und ſuche z. B. die kürzeſte Entfernung von g nach n (Fig. 6.).

Weil nach der Annahme $\overline{BO}$ parallel mit $\overline{CD}$ iſt, ſo wird die Ebene ABO auch derſelben Linie parallel ſeyn, und die geſuchte Entfernung iſt folglich dieſelbe, als die Entfernung irgend eines Punktes der Linie CD z. B. C, von der Ebene ABO.

Senke ich nun vom Punkte C, das Perpendikel $\overline{Cu}$ auf $\overline{BO}$, und ziehe $\overline{Au}$, ſo iſt $CBAu$ eine dreyeckichte Pyramide, und die geſuchte Entfernung iſt, wenn wir ABu als Grundfläche annehmen, die Höhe dieſer Pyramide, man braucht alſo nur die 6 Kanten der Pyramide $CBAu$ durch die 6 Kanten der Pyramide $ABCD$ auszudrücken, ſo giebt die Formel (6) uns die geſuchte Höhe.

Unter den Kanten der Pyramide $CBAu$ ſind $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ ſchon bekannt, und es iſt

$$\overline{Cu} = \overline{BC} \,.\, \mathit{ſin}\, C\hat{B}O = \overline{BC} \,.\, \mathit{ſin}\, B\hat{C}D$$

$$\overline{Bu} = -\overline{BC} \,.\, \mathit{coſ}\, B\hat{C}D$$

$$\overline{Au}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{Bu}^2 - 2\overline{AB} \,.\, \overline{Bu} \,.\, \mathit{coſ}\, A\hat{B}u.$$

Da nun $A\hat{B}u = g\hat{}n$ dem Winkel, der in der vorigen Aufgabe gefunden ward, ſo iſt alles bekannt, und

wir erhalten (Fig. 5 und 6.) die 6 Kanten der neuen Pyramide in Werthen der erſten

$$\left.\begin{aligned}
\overline{AB} &= g \\
\overline{AC} &= h \\
\overline{BC} &= m \\
\overline{Bu} &= \tfrac{1}{2n}(pp - mm - nn) \\
\overline{Cu} &= \tfrac{1}{2n}\sqrt{(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4} \\
\overline{Au} &= \tfrac{1}{2n}\sqrt{(n^4 - m^4 - p^4 + 4g^2n^2 + 2m^2p^2 + 2h^2m^2 + 2h^2n^2 + 2f^2p^2 - 2h^2m^2 - 2f^2n^2 - 2h^2p^2)}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

Um nun die Formel (6) auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, muſs man für

m . . . . $\overline{AB}$
n . . . . $\overline{Bu}$
p . . . . $\overline{Au}$
f . . . . $\overline{Cu}$
g . . . . $\overline{AC}$
h . . . . $\overline{BC}$

ſetzen, dann giebt x durch eine quadratiſche Gleichung ohne zweytes Glied die geſuchte Entfernung.

42. Die ſo gefundene Formel löſet die allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und der Entfernung zweyer gegenüberſtehenden Kanten, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe XVII.

43. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide den Winkel auszudrücken, welchen 2 Halbmeſſer der umſchriebenen Kugel bilden, die man zu den Endpunkten einer Kante zieht.

Ich behalte die vorigen Benennungen und ſuche z. B. den Winkel, den die Halbmeſſer bilden, die durch *B*, *C*, gehen (Fig. 4.).

Der geſuchte Winkel heiſse m', ſo haben wir

$$cof\, m' = \frac{2RR - mm}{2RR}$$

oder

$$2(1 - cof\, m')\, RR = mm \ldots . \quad (A)$$

Subſtituiren wir hier den Werth von R aus der Formel (A) der Aufgabe (IV, 10), ſo haben wir

$$(1 - cof\, m')\,\{g^4n^4 + f^4m^4 + h^4p^4 - 2g^2h^2n^2p^2 - f^2h^2m^2p^2 - 2f^2g^2m^2n^2\}$$
$$= 2nm(g^4n^2 + n^4g^2 + f^4m^2 + m^4f^2 + h^4p^2 + p^4h^2 - g^2m^2n^2 - g^2n^2p^2 - g^2f^2m^2 - g^2h^2n^2 - g^2h^2p^2 - f^2m^2n^2 - f^2m^2p^2 - h^2n^2p^2 - f^2h^2m^2 - f^2h^2p^2) \ldots . \quad (B)$$

44. Die Formel löſet folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und irgend einem der Winkel, den die zu den Endpunkten einer Kante gezogenen Halbmeſſer der umſchriebenen Kugel bilden 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe XVIII.

45. Wenn von allen Quantitäten, die bey der Conſtruction einer dreyeckichten Pyramide vorkommen, 6 gegeben ſind, die die übrigen beſtimmen, dieſe übrigen zu finden.

Zu denen, die die übrigen nicht beſtimmen, gehören z. B. die 6 Winkel, oder 4 Quantitäten, die zu einem Dreyecke gehören.

Sind es aber ſolche, die den Reſt beſtimmen, ſo ſuche man ihren Werth aus den vorigen Formeln durch die Kanten auszudrücken, und ziehe dann in gegebenen Gröſsen den Werth jeder Kante aus dieſen Gleichungen, welche Werthe man in die Formeln für jede Quantität, die zur Conſtruction der Pyramide gehört, ſubſtituirt.

46. Sucht man nur das Verhältniſs, das zwiſchen den Winkeln der Pyramide beſteht, ſo ſind 5 genug, um die übrigen zu finden.

So wie wir alle Theile der Pyramide durch die Kanten ausgedrückt haben, könnten wir auch alle ihre Winkel in Werthen der 6 Winkel ausdrücken, welche je zwei Seitenflächen bilden, wenn wir vorher die Bedingungsgleichung aufſtellen, die dieſe 6 Quantitäten unter einander verbindet, da 5 von ihnen genug ſind, den 6ten zu beſtimmen.

47. Man könnte zu dieſer Beſtimmung auch 6 andere Winkel nehmen, z. B. die Winkel, welche zwey Halbmeſſer der umſchriebenen Kugel, die durch die Endpunkte einer Kante gehen, machen, wenn man

nur eben ſo vorher hier die Bedingungsgleichung aufſtellt, die dieſe Winkel unter einander verbindet.

Dieſe Bedingungsgleichung iſt leicht zu finden. Bezeichnen wir dieſe Winkel mit m', n', p', g', h', f', wie in der XVII. Aufgabe, ſo haben wir

$$\left.\begin{array}{l} mm = 2RR\,(1-\cos m') \\ nn = 2RR\,(1-\cos n') \\ pp = 2RR\,(1-\cos p') \\ gg = 2RR\,(1-\cos g') \\ hh = 2RR\,(1-\cos h') \\ ff = 2RR\,(1-\cos f') \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (B)$$

Subſtituirt man alſo in allen vorher gefundenen Formeln für mm, nn, pp, u. ſ. w. dieſe Werthe, ſo hat man alle Quantitäten des Syſtems, durch den Halbmeſſer R der umſchriebenen Kugel, und die Winkel m', n', u. ſ. w. ausgedrückt. Da dieſs aber 7 Quantitäten ſind, und nur 6 nöthig ſind, ſo muſs man einen der Winkel durch die Bedingungsgleichung verſchwinden laſſen, die wir ſuchen wollen.

Setzt man in die Formel (A) der Aufgabe (IV, 12) die hier gefundenen Werthe für mm, nn, u. ſ. w. ſo iſt die Gleichung durch R^8 zu dividiren, man kann alſo nur $R = 1$ ſetzen, um die Bedingungsgleichung zu erhalten.

$$1-\cos m'^2-\cos n'^2-\cos p'^2-\cos f'^2-\cos g'^2-\cos h'^2$$
$$+\cos m'^2.\cos f'^2+\cos n'^2.\cos g'^2+\cos p'^2.\cos h'^2+$$
$$\ldots\ldots (C)$$
$$+2\cos m'\cos n'\cos p' \;+\; 2\cos m'\cos g'\cos h'$$
$$+2\cos n'\cos h'\cos f' \;+2\cos g'\cos h'\cos f'$$
$$-2\cos m'\cos n'\cos f'\cos g' \;-\; 2\cos m'\cos f'\cos p'\cos h'$$
$$-2\cos n'\cos g'\cos p'\cos h' = 0$$

Dieſs iſt die Bedingungsgleichung, vermittelſt der man mit den Gleichungen (B) alle Quantitäten des Syſtems in Werthen von R und ζ der Winkel m', n', p', f', g', h' ausdrücken kann.

Ehe wir an die Hauptunterſuchung dieſer Abhandlung kommen, wollen wir uns noch mit dem Verhältniſs der Winkel beſchäftigen.

Aufgabe XIX.

43. Wenn von 6 Bögen gröſster Kreiſe, die zu zweyen 4 Punkte auf der Oberfläche einer Kugel vereinigen, 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

Es ſeyen B, C, D, E (Fig. 5.) die 4 Punkte auf der Oberfläche der Kugel, BC, BD, BE, CD, CE, DE die 6 Bögen gröſster Kreiſe, die dieſe Punkte zu zweyen verbinden, ſo entſteht im ſphäriſchen Viereck $BCDE$, deſſen 4 Seiten BC, CD, DE, BE, und die Diagonalen BD, CE ſind. Man ſoll das Verhältniſs zwiſchen Seiten und Diagonalen finden.

Entgegengeſetzte Bögen nenne ich die, welche keine gemeinſchaftliche Endpunkte haben, ſo ſind entgegengeſetzt

BC, DE
CD, BE
BD, CE

Von den 3 Bogen BC, CD, BD, welche das ſphäriſche Dreyeck BCD bilden, ſind keine entgegengeſetzt, aber ſie ſind alle reſpective den Bögen s, q, r entgegengeſetzt, die vom 4ten Winkel E ausgehen.

Eben das hat bey den andern Dreyecken *BED*, *CBE*, *CDE* ſtatt.

Zieht man aus dem Mittelpunkte *A* (Fig. 6.) der Kugel, auf deren Oberfläche das Viereck beſchrieben iſt, Halbmeſſer zu den 4 Winkeln *B*, *C*, *D*, *E*, ſo ſind die Halbmeſſer, welche einen Bogen umfaſſen, von denen verſchieden, die den entgegengeſetzten Bogen umfaſſen; hingegen wenn die Bogen nicht entgegengeſetzt ſind, ſo iſt unter den Halbmeſſern einer, der 2 Bogen zugehört. Man ſieht, daſs dieſe 4 Halbmeſſer die 4 Kanten einer viereckichten Pyramide bilden, in der wir entgegengeſetzt die Seitenflächen nennen, wovon jede von zwey andern Halbmeſſern umfaſst wird. So ſind am Scheitel einer viereckichten Pyramide *ABCDE* 6 entgegengeſetzte Seitenflächen:

ABC, *ADE*
ACD, *ABE*
ABD, *ACE*

Wir eilen zur Sache. Es ſeyen in dem Viereck *BCDE* (Fig. 7.)

$m = BC$, $n = CD$, $p = BD$ } der 3 Bögen eines der 4 Dreyecke, die ihre Scheitel in den Winkeln des Vierecks haben;

$s = ED$, $q = EB$, $r = EC$ } die 3 den erſten entgegengeſetzten Bogen.

Das 3te Lemma giebt folgende Gleichung:

$$1 - cof\hat{CBE}^2 - cof\hat{CBD}^2 - cof\hat{BDE}^2 + 2cof\hat{CBE} \cdot cof\hat{CBD}\, cof\hat{DBE} = 0 \quad \ldots \quad (A)$$

eben so haben wir durch das vorhergehende Lemma

$$\left.\begin{aligned} cof C\hat{B}E &= \frac{cof r - cof m \,.\, cof q}{sin m \,.\, sin q} \\ cof C\hat{B}D &= \frac{cof n - cof m \,.\, cof p}{sin m \,.\, sin p} \\ cof D\hat{B}E &= \frac{cof s - cof p \,.\, cof q}{sin p \,.\, sin q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (B)$$

Substituiren wir die Werthe in (A),

so kommt

$$\begin{aligned} &sin\, m^2 sin\, p^2 \,.\, sin\, q^2 - sin\, p^2 \,(cof r - cof m \,.\, cof q)^2 \\ &- sin\, q^2 \,(cof n - cof m\, cof p)^2 \,- sin\, m^2 \,(cof s \\ &\qquad\qquad - cof p \,.\, cof q)^2 \\ &+ 2\,(cof r - cof m\, cof q)\,(cof n - cof m\, cof p) \\ &\qquad\qquad (cof s - cof p \,.\, cof q) = o \ldots (C) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &1 - cof m^2 - cof n^2 - cof p^2 - cof q^2 - cof r^2 - cof s^2 \\ &+ cof m^2 \,.\, cof s^2 + cof n^2 \,.\, cof q^2 + cof p^2 \,.\, cof r^2 \\ &+ 2 cof m\, cof n \,.\, cof p + 2 cof m \,.\, cof q \,.\, cof r \\ &+ 2 cof n \,.\, cof r \,.\, cof s + 2 cof p \,.\, cof s \,.\, cof s \\ &- 2 cof m\, cof n \,.\, cof q \,.\, cof s - 2 cof m \,.\, cof p \,. \\ &\qquad\qquad cof r \,.\, cof s \\ &- 2 cof n \,.\, cof p \,.\, cof q \,.\, cof r = o \quad \ldots . \quad (D) \end{aligned}$$

Diese Formel enthält nur Cosinus, die nicht höher als in der zweyten Potenz vorkommen, die Gleichung also für die Unbekannte kann nur vom 2ten Grade seyn. Sie ist übrigens mit der Formel (47) einerley, wie das auch seyn muss.

Aufgabe XX.

49. Wenn von den 6 Winkeln, welche von 2 der 4 Kanten, die vom Scheitel einer

viereckichten Pyramide ausgehen, gebildet werden, 5 gegeben sind, den 6ten zu finden.

Es sey (Fig. 8.) A der Scheitel, $BCDE$ die Grundfläche, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, die 4 Kanten, welche vom Scheitel ausgehen.

Wir wollen A als den Mittelpunkt einer Kugel annehmen, deren Oberfläche in B', C', D', E', von den 4 Kanten geschnitten werden. Verbinden wir diese Punkte durch Bogen gröfster Kreise, so entsteht daraus ein sphärisches Viereck $B'C'D'E'$, dessen 4 Seiten und 2 Diagonalen grade das Maafs der gesuchten Winkel sind. Setzen wir also

$$\overline{AB}\hat{}\overline{AC} = m$$
$$\overline{AC}\hat{}\overline{AD} = n$$
$$\overline{AB}\hat{}\overline{AD} = p$$
$$\overline{AE}\hat{}\overline{AD} = s$$
$$\overline{AE}\hat{}\overline{AB} = q$$
$$\overline{AC}\hat{}\overline{AE} = r$$

so haben wir eine Formel (A), die ganz identisch mit der Formel (48, D) ist. Man mufs nur nicht vergessen, dafs die Winkel s, q, r, respective den Winkeln m, n, p gegenüberstehn.

Aufgabe XXI.

50. Wenn von den 6 Winkeln, welche von 4 Linien, die durch einen beliebigen Punkt im Raum gezogen sind, gebildet werden, 5 gegeben sind, den 6ten zu finden.

Man

Man kann dieſe 4 Linien als 4 Kanten einer viereckichten Pyramide betrachten. Bezeichnet man ſie alſo (Fig. 8.) mit f, g, h, l, und iſt

$$\hat{gh} = m$$
$$\hat{hf} = n$$
$$\hat{fg} = p$$
$$\hat{fl} = s$$
$$\hat{gl} = q$$
$$\hat{hl} = r$$

ſo erhalten wir eine Formel (A), die ganz mit der Formel (48, D) identiſch iſt.

Es ſey $ABCD$ (Fig. 8*) die Projection eines Vierecks, das nicht in einer Ebene liegt, und m, n, q, s, p, r, die 6 Winkel, welche von den Seiten dieſes Vierecks gebildet werden, wo $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ die gegenüberſtehenden Seiten ſind, ſo daſs

m, der Winkel iſt, den die Seiten bilden, deren Projectionen $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ ſind;

s, der Winkel zwiſchen den reſpective gegenüberſtehenden Seiten;

n, der Winkel zwiſchen den Seiten, deren Projection $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ iſt;

q, der Winkel zwiſchen den reſpective gegenüberſtehenden Seiten;

r, der Winkel zwiſchen den Zeiten, deren Projection $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ iſt, oder vielmehr weil dieſe Linien nicht in einer Ebene ſind, der Winkel zwiſchen $\overline{AB}$ und einer Linie, die durch einen Punkt von $\overline{AB}$ parallel mit $\overline{CD}$ gezogen iſt.

Jetzt wollen wir durch irgend einen Winkel des Vierecks, z. B. durch den, deſſen Projection D iſt, zwey Linien DF', DE' reſpective mit $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ parallel ziehen, und die 4 Richtungen $\overline{DA'}$, $\overline{DC'}$, $\overline{DE'}$, $\overline{DF'}$, die vom Punkte D abgerechnet werden, mit g, l, f, h bezeichnen, ſo hat man offenbar

$$\hat{gh} = m$$
$$\hat{hf} = n$$
$$\hat{gl} = q$$
$$\hat{fl} = s$$
$$\hat{fg} = \text{ſuppl. } p$$
$$\hat{hl} = \text{ſuppl. } r.$$

Da nun g, h, f, l von einem Punkte ausgehen, ſo iſt die vorige Formel auf dieſe 6 Winkel anwendbar, und man erhält, weil

$$\text{cof } 180^\circ - p = -\text{cof } p$$
$$\text{cof } 180^\circ - r = -\text{cof } r$$

folgende Formel, die das Verhältniſs ausdrückt, welches zwiſchen den 6 Winkeln beſteht, die von den 4 Seiten eines Vierecks, das nicht in einer Ebene liegt, gebildet werden.

$$1 - \text{cof } m^2 - \text{cof } n^2 - \text{cof } p^2 - \text{cof } q^2 - \text{cof } r^2 - \text{cof } s^2$$
$$+ \text{cof } m^2 \text{ cof } s^2 + \text{cof } n^2 \text{ cof } q^2 + \text{cof } p^2 \text{ cof } r^2$$
$$- 2\text{cof } m \cdot \text{cof } n \cdot \text{cof } p - 2\text{cof } m \cdot \text{cof } q \cdot \text{cof } r$$
$$- 2\text{cof } n \cdot \text{cof } r \cdot \text{cof } s - 2\text{cof } p \cdot \text{cof } q \cdot \text{cof } s$$
$$- 2\text{cof } m \cdot \text{cof } n \cdot \text{cof } q \cdot \text{cof } s - 2\text{cof } m \cdot \text{cof } p \cdot \text{cof } r \cdot \text{cof } s$$
$$- 2\text{cof } n \cdot \text{cof } p \cdot \text{cof } q \cdot \text{cof } r = o \quad \ldots \quad (B)$$

Aufgabe XXII.

51. Wenn von den 6 Winkeln, welche die 4 Seitenflächen einer dreyeckichten Pyramide bilden, 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

Aus einem Punkte innerhalb der Pyramide wollen wir ein Perpendikel auf jede Seitenfläche ſenken. Man ſieht leicht, daſs dieſe Perpendikel Winkel bilden werden, die die Supplemente der Winkel der Seitenflächen ſind, auf die ſie fallen.

Bezeichnen wir alſo die 4 Seitenflächen mit *F, G, H, L* und iſt

$$\hat{GH} = m$$
$$\hat{HF} = n$$
$$\hat{FG} = p$$
$$\hat{FL} = s$$
$$\hat{GL} = q$$
$$\hat{HL} = r$$

ſo brauchen wir in der vorher gefundenen Formel nur die Zeichen der Coſinus zu ändern, wodurch ſie ſelbſt aber nicht verändert wird.

Aufgabe XXIII.

52. Von den 6 Winkeln, welche die 4 Seiten eines ſphäriſchen Vierecks bilden, die man bis zum Zuſammenſtoſsen verlängert, ſind 5 gegeben, man ſucht den 6ten.

Es ſey (Fig. 9.) *ABCD* das gegebene ſphäriſche Viereck, wir wollen die gegenüberſtehenden Seiten

BA, CD, und AD, BC verlängern, bis sie sich in F, und E schneiden, so sind die 6 Winkel $B\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{F}D$, $A\hat{E}D$.

Aus dem Mittelpunkt der Kugel wollen wir Halbmesser zu den Punkten A, B, C, D, E, F, ziehen, und durch je zwey von ihnen Ebenen legen, die die Oberfläche der Kugel in Bögen gröfster Kreise $\overset{\frown}{BAF}$, $\overset{\frown}{CDF}$, ADE, BCE schneiden.

Dann wollen wir aus einem Punkte des Raumes K eine senkrechte Linie auf jede Seitenfläche senken, so erhalten wir die Perpendikel $\overline{Kt}$, $\overline{Ku}$, $\overline{Kv}$, $\overline{Kx}$. Die Winkel dieser Perpendikel sind die Supplemente der Winkel der Flächen, d. h. wenn π den Quadranten bedeutet, so haben wir

$$u\hat{K}t = 2\pi - AB\hat{A}D$$
$$u\hat{K}v = 2\pi - BA\hat{B}C$$
$$t\hat{K}v = 2\pi - ED\hat{E}C$$
$$v\hat{K}x = 2\pi - CB\hat{C}D$$
$$t\hat{K}x = 2\pi - DA\hat{D}C$$
$$u\hat{K}x = 2\pi - FA\hat{F}D$$

Die Formel (50) ist aber auf die Winkel $u\hat{K}t$, $u\hat{K}v$, tKv, $u\hat{K}x$, tKx, $u\hat{K}x$ anwendbar, welche von den 4 Linien, die vom Punkte K ausgehen, gebildet werden, man braucht also nur die Zeichen der Cosinus zu verändern, um sie auf $AB\hat{A}D$ u. s. w. anzuwenden.

Nennt man alſo

$$\hat{AB}\hat{AD} = m$$
$$\hat{BA}\hat{BC} = n$$
$$\hat{ED}\hat{EC} = p$$
$$\hat{CB}\hat{CD} = s$$
$$\hat{DA}\hat{DC} = q$$
$$\hat{FA}\hat{FD} = r$$

ſo erhält man eine Formel, die vollkommen mit (50, B) identiſch iſt.

53. Offenbar läſst ſich dieſelbe Formel auf die 6 Winkel anwenden, welche von den 4 Seitenflächen einer viereckichten Pyramide gebildet werden, deren Scheitelpunkt im Mittelpunkt der Kugel iſt, auf deren Oberfläche das ſphäriſche Viereck *BCDE* beſchrieben iſt, und deren 4 Kanten dieſe Oberfläche in *B, C, D, E* ſchneiden.

Aufgabe XXIV.

54. Wenn von den 3 Winkeln, welche die Kanten einer dreyeckichten Pyramide, die ſich im Scheitel vereinigen, bilden, und den 3 andern Winkeln, welche dieſe Kanten mit der Grundfläche der Pyramide bilden, 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

Senkt man aus dem Scheitel ein Perpendikel auf die Grundfläche, ſo ſieht man leicht, daſs die 3 Winkel, die dieſes Perpendikel mit den Kanten im Scheitel bildet, die Complemente der Winkel ſind, welche die Kanten mit der Grundlinie bilden.

Die Formel (50) kann alſo hier angewandt werden, wenn man für dieſe 3 Winkel die Sinus ſtatt der Coſinus ſetzt. D. h. wenn man die 3 Kanten mit f, g, h, die Grundfläche mit L bezeichnet, und

$$g\hat{}h = m$$
$$h\hat{}f = n$$
$$f\hat{}g = p$$
$$f\hat{}L = s$$
$$g\hat{}L = q$$
$$h\hat{}L = r$$

ſetzt, ſo muſs man in der Formel (50, A oder 48, D)

s mit $\pi - s$ vertauſchen
q mit $\pi - q$
r mit $\pi - r$

oder was auf eins kommt, man ſetzt in dieſe Formel

für $cof\, s$ . . . . $fin\, s$
$cof\, q$ . . . . $fin\, q$
$cof\, r$ . . . . $fin\, r$

ſo erhält man folgende Formel

$$1 - cof\,m^2 - cof\,n^2 - cof\,p^2 - fin\,q^2 - fin\,r^2 - fin\,s^2$$
$$+ cof\,m^2 \,.\, fin\,s^2 + cof\,n^2 \,.\, fin\,q^2 + cof\,p^2 \,.\, fin\,r^2$$
$$+ 2cof\,m \,.\, cof\,n \,.\, cof\,p + 2cof\,m \,.\, fin\,q \,.\, fin\,r$$
$$+ 2cof\,n \,.\, fin\,r \,.\, fin\,s + 2cof\,p \,.\, fin\,q \,.\, fin\,s$$
$$- 2cof\,m \,.\, cof\,n \,.\, fin\,q \,.\, fin\,s - 2cof\,m \,.\, cof\,p \,.\, fin\,r \,.\, fin\,s$$
$$- 2cof\,n \,.\, cof\,p \,.\, fin\,q \,.\, fin\,r = o \quad \ldots \quad (A)$$

Aufgabe XXV.

55. Wenn von den 3 Winkeln, welche die im Scheitel zuſammenſtoſsenden Kanten einer dreyeckichten Pyramide mit den reſpective gegenüberſtehenden Seitenflä-

chen bilden, und den 3 Winkeln, welche mit eben dieſen Seitenflächen, eine beliebige, die Pyramide durchſchneidende grade Linie bildet, 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

Durch den Scheitel der Pyramide ziehe ich eine der Transverſale parallele Linie, die alſo mit den Seitenflächen dieſelben Winkel als die Transverſale macht. Ziehen wir noch durch den Scheitelpunkt 3 Linien, die auf den Seitenflächen ſenkrecht ſtehen, ſo ſind die Winkel dieſer Linien mit der Parallele, Complemente der Winkel der Parallele mit den Seitenflächen. Bezeichnet man alſo die 3 Kanten mit f, g, h, die dieſen Kanten reſpective gegenüberſtehenden Seitenflächen mit F, G, H, die mit der Transverſale parallele Linie mit L, ſo ſind die Winkel, welche dieſe Linie mit den Perpendikeln auf den Seitenflächen bildet,

$$\pi - \hat{LF}$$
$$\pi - \hat{LG}$$
$$\pi - \hat{LH}$$

Eben ſo ſind die Winkel der Perpendikel und gegenüberſtehenden Kanten die Complemente der Winkel, der Kanten und Seitenflächen.

Die 3 Perpendikel alſo und die Parallele mit der Transverſale ſind 4 Linien, die von einem Punkt ausgehen, und folgende 6 Winkel bilden, wovon die 3 letzten den 3 erſten entgegengeſetzt ſind:

$$\pi - f\hat{F}$$
$$\pi - g\,G$$
$$\pi - h\,H$$
$$\pi - L\hat{F}$$
$$\pi - L\hat{G}$$
$$\pi - L\hat{H}$$

Die Formel (50) ist also auf diese 6 Winkel anwendbar, d. h. wenn man

$$f\hat{F} = m$$
$$g\hat{G} = n$$
$$h\hat{H} = p$$
$$L\hat{F} = s$$
$$L\hat{G} = q$$
$$L\hat{H} = r$$

nimmt, so braucht man nur, statt Cosinus, Sinus in die Formel zu setzen, so wird

$$1 - \sin m^2 - \sin n^2 - \sin p^2 - \sin q^2 - \sin r^2 - \sin s^2$$
$$+ \sin m^2 . \sin s^2 + \sin n^2 . \sin q^2 + \sin p^2 . \sin r^2$$
$$+ 2\sin m . \sin n . \sin p + 2\sin m . \sin q . \sin r$$
$$+ 2\sin n . \sin r . \sin s + 2\sin p . \sin q . \sin s$$
$$- 2\sin m . \sin n . \sin q . \sin s - 2\sin m . \sin p . \sin r . \sin s$$
$$- 2\sin n . \sin p . \sin q . \sin r = 0 \quad \ldots . \quad (A)$$

Bemerkung.

56. Wir könnten leicht die Zahl dieser Untersuchungen vergrösern, aber wir würden unsern Hauptgegenstand, das Verhältniss zwischen den Entfernungen von 5 Punkten im Raume zu untersuchen, aus den Augen verlieren. Er soll uns in der folgenden Aufgabe beschäftigen, doch kann ich die Pyramide nicht verlassen, ohne den Wunsch zu äusern, man

möge durch ſie für die Geometrie dreyer Dimenſionen eben das thun, was man für die ebene Geometrie durch die Auflöſung des Dreyecks in allen möglichen Fällen gethan hat. Wir haben freilich oben (45) die Auflöſung des allgemeinen Problems gegeben, aber eigentlich doch nicht mehr gethan, als es in Gleichung geſetzt, ſo wie man die allgemeine Aufgabe der Trigonometrie in Gleichung ſetzt, wenn man alle Theile des Dreyecks in Werthen dreyer von einander unabhängigen ausdrückt. Man ſoll aber dieſe Urgleichungen für jede beſondere Aufgabe entwickeln, und ihnen eine für den numeriſchen Calcul geſchmeidige Form geben. So würde es eine ungeheure Arbeit ſeyn, wenn man von den Urgleichungen unmittelbar auf die algebraiſche oder numeriſche Auflöſung der Pyramide in allen beſondern Fällen kommen wollte, wenn gleich dieſe Arbeit ſehr nützlich ſeyn würde.

57. Schlieſslich bemerke ich noch, daſs man in allen vorigen Formeln gewiſſe Claſſen von Quantitäten findet, deren Summe man, um die Rechnung zu verkürzen, durch einen Buchſtaben vorſtellen kann. So ſind z. B. in der Formel (IV, 12, A) die 6 erſten Glieder des Factors, der mit $4RR$ multiplicirt wird, nichts als die Producte der 4ten Potenz jeder Kante mit dem Quadrat der gegenüberſtehenden multiplicirt. Man kann dieſe Summe alſo durch M bezeichnen.

Die 4 folgenden Glieder ſind die Summen der Producte der Quadrate derjenigen 3 Kanten, welche eine Seitenfläche begränzen. Wir bezeichnen ſie mit N.

Die 12 folgenden Glieder ſind die Summe der Producte der zur zweyten Potenz erhobenen Kanten zu dreyen multiplicirt, indem man ſie nach der Reihe nahm, ſo daſs 2 gegenüberſtehende in jedem Producte ſind. Wir bezeichnen ſie mit O.

Die 3 folgenden Glieder ſind die doppelte Summe der Producte der quadrirten Kanten zu 4 genommen, ſo daſs in dieſen 4 zwey Paar gegenüberſtehende ſind. Wir bezeichnen ſie mit P.

Die 3 letzten Glieder bilden die Summe der Producte der Kanten in der vierten Potenz zu zweyen genommen. Wir bezeichnen ſie mit Q.

Dann wird die Formel

$$4RR\,(M+N-O)+P-Q=o \ldots\ldots \text{(A)}$$

Die Formel (II, 6, A) läſst ſich ſo ausdrücken:

$$xx\,(2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4) \\ +M+N-O=o \ldots \text{(B)}$$

Die Formel (III, 9, A) ſo:

$$9\,.\,16\,.SS+M+N-O=o \ldots\ldots \text{(C)}$$

Eben ſo bey den meiſten Formeln bis (48). Man kann ſie auf dieſe Art leichter combiniren; z. B. verbindet man die erſte mit der dritten, ſo hat man

$$1.\,1.\,2.\,2.\,3.\,3.\,4.\,4.\,RR.\,SS=Q-P \ldots\ldots \text{(D)}$$

Da

$$Q=m^4f^4+g^4n^4+h^4p^4$$
$$P=2n^2g^2p^2h^2+2m^2p^2f^2h^2+2m^2n^2f^2g^2$$

ſo haben wir, wenn wir in dieſe Formeln die (47) gefundenen Werthe ſetzen:

$$Q=16\,R^8\{(1-cof m')^2\,(1-cof f')+(1-cof g')^2 \\ (1-cof n')^2+(1-cof h')^2\,(1-cof p')^2\}$$

$$P = 2.16\{(1-\cos n')(1-\cos p')(1-\cos g')(1-\cos h')$$
$$+(1-\cos m')(1-\cos p')(1-\cos f')(1-\cos h')$$
$$+(1-\cos m')(1-\cos n')(1-\cos f')(1-\cos g')\}$$

ſetzt man dieſe Werthe von Q, und P in die vorige Formel, und dividirt mit $16RR$, ſo haben wir folgende Formel, die den Inhalt der Pyramide in Werthen des Halbmeſſers der umſchriebenen Kugel und der 6 Winkel giebt, die die Radien am Mittelpunkte bilden, welche man nach den Scheiteln der Pyramide zog.

$$S = \tfrac{1}{6} R^3 \sqrt{\{(1-\cos m')^2\ (1-\cos f')^2 + (1-\cos g')^2}$$
$$(1-\cos n')^2 + (1-\cos h')^2 (1-\cos p')^2$$
$$-2(1-\cos n')\ (1-\cos p')(1-\cos g')\ (1-\cos h')$$
$$-2(1-\cos m')(1-\cos p')\ (1-\cos f')\ (1-\cos h')$$
$$-2(1-\cos m')\ (1-\cos n')\ (1-\cos f')$$
$$(-1\cos g')\} \ldots\ldots \text{(E)}$$

Aufgabe XXVI.

58. Wenn von 10 Linien, die 5 im Raume gegebne Punkte verbinden, 9 gegeben ſind, die 10te zu finden.

Es ſeyen (Fig. 8.) A, B, C, D, E, die 5 gegebenen Punkte. Wir wollen die 10 Linien, welche ſie verbinden, ſo bezeichnen:

$$\overline{AD} = f$$
$$\overline{AB} = g$$
$$\overline{AC} = h$$
$$\overline{AE} = l$$
$$\overline{BC} = m$$
$$\overline{CD} = n$$

$$\overline{BD} = p$$
$$\overline{BE} = q$$
$$\overline{CE} = r$$
$$\overline{DE} = s$$

Dann nehmen wir einen Punkt, z. B. A, als Mittelpunkt einer Kugel von beliebigem Halbmeſſer, und verlängern die 4 Linien oder Kanten die von A ausgehen, bis ſie die Oberfläche der Kugel in B', C', D', E' treffen, verbinden dieſe Punkte durch Bögen gröſster Kreiſe, die wir ſo bezeichnen:

$$\overset{\frown}{B'C'} = m'$$
$$\overset{\frown}{C'D'} = n'$$
$$\overset{\frown}{B'D'} = p'$$
$$\overset{\frown}{D'E'} = s'$$
$$\overset{\frown}{B'E'} = q'$$
$$\overset{\frown}{C'E'} = r'$$

Wir haben (48.) zwiſchen dieſen Bögen folgende Gleichung:

$$1 - cof\,m'^2 - cof\,n'^2 - cof\,p'^2 - cof\,q'^2 - cof\,r'^2 - cof\,s'^2$$
$$+ cof\,m'^2 \cdot cof\,s'^2 + cof\,n'^2 \cdot cof\,q'^2 + cof\,p'^2 \cdot cof\,r'^2$$
$$+ 2cof\,m' \cdot cof\,n' \cdot cof\,p' + 2cof\,m' \cdot cof\,q' \cdot cof\,r'$$
$$+ 2cof\,n' \cdot cof\,r' \cdot cof\,s' + 2cof\,p' \cdot cof\,q' \cdot cof\,s'$$
$$- 2cof\,m' \cdot cof\,n' \cdot cof\,q' \cdot cof\,s' - 2cof\,m' \cdot cof\,p' \cdot cof\,r' \cdot cof\,s'$$
$$- 2cof\,n' \cdot cof\,p' \cdot cof\,q' \cdot cof\,r' = 0 \quad \ldots \quad (A)$$

Da aber die Bögen m', n', u. ſ. w. das Maaſs der Winkel $B\hat{A}C$, $C\hat{A}D$ u. ſ. w., ſo haben wir auch

$$\cos m' = \frac{gg + hh - mm}{2gh}$$

$$\cos n' = \frac{ff + hh - nn}{2fh}$$

$$\cos p' = \frac{gg + ff - pp}{2gf}$$

$$\cos s = \frac{ff + ll - ss}{2fl}.$$

$$\cos q = \frac{gg + ll - qq}{2gl}$$

$$\cos r = \frac{hh + ll - rr}{2hl}$$

Setzt man dieſe Werthe in die Gleichung (A), bringt alles auf denſelben Nenner $16.ff\,gg\,hh\,ll$, und hebt die Glieder, bey denen es angeht, auf, ſo erhält man nach einer langen Rechnung folgende ſymmetriſche Formel zwiſchen f, g, h, l, m, n, p, q, r, s, die, wenn gleich vom vierten Grade, doch wie eine quadratiſche aufgelöſet werden kann.

$$
\begin{aligned}
&g^4n^4 + g^4s^4 + g^4r^4\\
&+ h^4s^4 + h^4q^4 + h^4p^4\\
&+ f^4m^4 + f^4q^4 + f^4r^4\\
&+ l^4m^4 + l^4n^4 + l^4p^4\\
&+ m^4s^4 + n^4q^4 + r^4p^4\\
&- 2g^4n^2s^2 - 2g^4n^2r^2 - 2g^4r^2s^2\\
&- 2h^4q^2s^2 - 2h^4p^2s^2 - 2h^4p^2q^2\\
&- 2f^4m^2q^2 - 2f^4m^2r^2 - 2f^4q^2r^2\\
&- 2l^4m^2n^2 - 2l^4m^2p^2 - 2l^4n^2p^2\\
&- 2m^4f^2l^2 - 2m^4f^2s^2 - 2m^4l^2s^2\\
&- 2n^4g^2l^2 - 2n^4g^2q^2 - 2n^4l^2q^2\\
&- 2s^4g^2h^2 - 2s^4g^2m^2 - 2s^4h^2m^2\\
&- 2q^4f^2h^2 - 2q^4h^2n^2 - 2q^4f^2n^2\\
&- 2r^4f^2g^2 - 2r^4g^2p^2 - 2r^4f^2p^2\\
&- 2p^4h^2l^2 - 2p^4h^2r^2 - 2p^4l^2r^2\\
&- 4g^2h^2m^2s^2 - 4f^2g^2p^2r^2 - 4g^2l^2n^2q^2\\
&- 4g^2n^2r^2s^2 - 4f^2h^2n^2q^2 - 4h^2l^2p^2r^2\\
&- 4h^2p^2q^2s^2 - 4f^2l^2m^2s^2 - 4f^2m^2q^2r^2\\
&- 4l^2m^2n^2p^2 - 2g^2h^2n^2p^2 - 2g^2h^2q^2r^2\\
&- 2f^2g^2m^2r^2 - 2f^2g^2q^2s^2 - g^2l^2m^2r^2\\
&- 2g^2l^2p^2s^2 - 2f^2h^2m^2p^2 - 2f^2h^2r^2s^2\\
&- 2h^2l^2m^2q^2 - 2h^2l^2n^2s^2 - 2f^2l^2n^2r^2\\
&- 2f^2l^2p^2q^2 - 2m^2n^2q^2s^2 - 2m^2p^2r^2s^2\\
&\qquad\qquad - 2n^2p^2q^2r^2\\
&+ 2g^2h^2n^2s^2 + 2g^2h^2n^2q^2 + 2g^2h^2q^2s^2\\
&+ 2g^2h^2r^2s^2 + 2g^2h^2p^2s^2 + 2g^2h^2p^2r^2\\
&+ 2f^2g^2m^2s^2 + 2f^2g^2m^2r^2 + 2f^2g^2n^2q^2\\
&+ 2f^2g^2n^2r^2 + 2f^2g^2r^2s^2 + 2f^2g^2q^2r^2\\
&+ 2g^2l^2m^2n^2 + 2g^2l^2m^2s^2 + 2g^2l^2n^2s^2\\
&+ 2g^2l^2n^2r^2 + 2g^2l^2n^2p + 2g^2l^2p^2r^2\\
&+ 2g^2m^2n^2s^2 + 2g^2m^2r^2s^2 + 2g^2n^2q^2s^2
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$+2g^2n^2q^2r^2 +2g^2n^2p^2r^2 +2g^2p^2r^2s^2$$
$$+2f^2h^2m^2s^2 +2f^2h^2m^2q^2 +2f^2h^2q^2s^2$$
$$+2f^2h^2q^2r^2 +2f^2h^2p^2q^2 +2f^2h^2p^2r^2$$
$$+2h^2l^2m^2s^2 +2h^2l^2m^2p^2 +2h^2l^2n^2q^2$$
$$+2h^2l^2n^2p^2 +2h^2l^2p^2s^2 +2h^2l^2p^2q^2$$
$$+2h^2m^2q^2s^2 +2h^2m^2p^2s^2 +h^2n^2q^2s^2$$
$$+2h^2n^2p^2q^2 +2h^2p^2r^2s^2 +2h^2p^2q^2r^2$$
$$+2f^2l^2m^2n^2 +2f^2l^2m^2q^2 +2f^2\,{}^2m^2r^2$$
$$+2f^2l^2m^2p^2 +2f^2l^2n^2q^2 +2f^2l^2p^2r^2$$
$$+2f^2m^2n^2q^2 +2f^2m^2q^2s^2 +2f^2m^2r^2s^2$$
$$+2f^2m^2p^2r^2 +2f^2n^2q^2r^2 +2f^2p^2q^2r^2$$
$$+2l^2m^2n^2s^2 +2l^2m^2n^2q^2 +2l^2m^2p^2s^2$$
$$+2l^2m^2p^2r^2 +2l^2n^2p^2q^2 +2l^2n^2p^2r^2 = o \ldots \text{(A)}$$

59. Obgleich dieſe Formel von 130 Gliedern beym erſten Anblick etwas verwickelt ſcheint, ſo iſt ſie doch ſymmetriſch, und einem leicht aufzufaſſenden Geſetze unterworfen. Denn

1) die 15 erſten Glieder ſind die Producte der vierten Potenz derjenigen Kanten, die keinen gemeinſchaftlichen Endpunkt haben. Wir bezeichnen dieſe Summe mit F.

2) Die 30 folgenden Glieder ſind die doppelte Summe der Producte jeder Kante in der vierten Potenz mit den Quadraten zweyer gegenüberſtehenden Seiten. Es ſey dieſe Summe $= G$.

3) Die 10 folgenden Glieder bilden die vierfache Summe der Producte der Quadrate jeder Kante mit dem Producte der Quadrate der 3 gegenüberſtehenden multiplicirt. Es ſey dieſe Summe $= H$.

4) Die 15 folgenden Glieder bilden die doppelte Summe der Producte der Quadrate der Seiten eines jeden der Vierecke, die nicht in einer Ebene liegen, und bey der Conſtruction der Pyramide vorkommen. Es ſey dieſe Summe $= H$.

5) Endlich die 60 letzten Glieder ſind die doppelte Summe der Producte der Quadrate der 4 Kanten, die den Umfang eines Fünfecks, das nicht in einer Ebene liegt, bilden würden, von dem man die eine Seite weggenommen hat. So z. B. iſt $ABCDEA$ der Umfang eines ſolchen Fünfecks, deſſen Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ ſind; nimmt man die Seite $\overline{CD}$ weg, ſo bleiben $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{AE}$, aus denen das 14te Glied der letzten 60, nämlich: $2g^2l^2m^2s^2$ beſteht. Iſt dieſe Summe $nnn = L$, ſo kann man die Formel (A) ſo ausdrücken:

$$F - 2G - 4H - 2K + 2L = o \ldots\ldots \text{(B)}$$

60. Aus dieſer merkwürdigen Formel, dem eigentlichen Gegenſtande dieſer Abhandlung, fliefst die Auflöſung vieler ſchwieriger Aufgaben. Z. B. wenn 4 Punkte im Raume gegeben ſind, einen 5ten zu finden, deſſen Entfernungen von den 4 erſten in gegebenem Verhältniſſe ſind u. ſ. w.

Stellt man ſich von den 5 Punkten im Raume 4 als den Scheitel einer dreyeckichten Pyramide vor, und den 5ten als den Mittelpunkt der umſchriebenen Kugel, ſo findet man durch die vorige Formel den Halbmeſſer dieſer Kugel. Iſt E dieſer Mittelpunkt, ſo braucht man nur ſtatt l, q, r, s dieſen Halbmeſſer $= R$ zu ſetzen, und man erhält eine Formel, die, wie ſie muſs, identiſch mit der ſchon gefundenen (12, A) iſt.

61. So

61. So kann man auch das Verhältniſs zwiſchen den Entfernungen von 5 beliebigen auf der Oberfläche einer Kugel genommenen Punkten finden. Der Radius dieſer Kugel ſey $= R$, ſo hat man R in Werthen von m, n, p, f, g, h aus (60); da aber E auch auf der Kugelfläche iſt, ſo muſs eine ähnliche Gleichung ſtatt finden, wenn man s, q, r, für f, g, h ſetzt. Setzt man die aus beyden Gleichungen gefundenen Werthe von RR gleich, ſo hat man das Verhältniſs, das zwiſchen den 9 Kanten $m, n, p, f, g, h, s, q, r$ beſtehen muſs, wenn die 5 Punkte auf einer Kugelfläche ſeyn ſollen. Eben ſo beſteht ein ähnliches Verhältniſs zwiſchen $m, n, p, f, g, h, s, q, r, l$ zu Neunen auf alle mögliche Weiſe genommen, was alſo im Ganzen 10 Verhältniſſe von derſelben Art, wie das vorige, ausmacht.

Aufgabe XXVII.

62. Wenn man die Entfernungen 5 beliebiger Punkte im Raume kennt, den Neigungswinkel zu finden, den eine Linie, die durch 2 dieſer Punkte geht, mit der Ebene macht, die durch die andern 3 gelegt wird.

Die 5 gegebenen Punkte ſeyen A, B, C, D, E (Fig. 10.). Die Linie gehe durch A, B, die Ebene durch C, D, E. Sowohl aus A, als aus B ſenken wir Perpendikel auf die Ebene CDE, und legen durch dieſe beyden Perpendikel eine Ebene, in der die Linie, welche durch A und B geht, liegen muſs. Die beyden Perpendikel ſeyen $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$. Ziehen wir nun

durch a, b, eine grade Linie, die $\overline{AB}$ in K schneidet, so ist der Winkel $A\hat{K}a$ der gesuchte. Eben so wird aus B das Perpendikel $\overline{Ba'}$ auf Aa gesenkt, so ist

$$A\hat{B}a' = A\hat{K}a$$

und wir haben

$$\sin A\hat{K}a = \frac{\overline{Aa'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{Aa} - \overline{Bb}}{\overline{AB}}$$

Betrachten wir nun A als den Scheitel einer Pyramide, deren Grundfläche CDE ist, so kann man leicht die Höhe $\overline{Aa}$ durch die Formel (6) finden. Eben so findet man $\overline{Bb}$, wenn man B als den Scheitel einer Pyramide betrachtet, deren Grundfläche auch CDE ist. Da nun nach der Annahme $\overline{AB}$ auch bekannt ist, so ist der Werth von $\sin A\hat{K}a$ in lauter bekannten Grösen ausgedrückt.

Kennte man von den 10 Linien, welche die Punkte A, B, C, D, E verbinden, nur 9, so müsste man erst die 10te suchen (58.) und dann wie vorher verfahren.

Aufgabe XXVIII.

63. Wenn man von 6 Punkten im Raume die Entfernungen von einander kennt, den Winkel zu finden, den die beyden Ebenen machen, von denen eine 3 beliebige, und die andere die 3 übrigen enthält.

Es seyen (Fig. 11.) A, B, C, M, N, P die 6 Punkte, man sucht den Winkel, den die Ebene durch A, B, C, mit der Ebene durch M, N, P macht.

Wir wollen uns vorſtellen, daſs aus jedem der erſten Punkte A, B, C ein Perpendikel auf die zweyte Ebene geſenkt ſey. Da die Entfernungen aller Punkte gegeben ſind, ſo laſſen ſich dieſe Perpendikel leicht finden; denn ſtellt man ſich aus dem Punkte A, z. B. die Linien $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{AP}$, gezogen vor, ſo hat man eine dreyeckichte Pyramide, deren 6 Kanten gegeben ſind, und deren Höhe das geſuchte Perpendikel iſt.

Wird nun $\overline{AB}$ verlängert, bis ſie die beiden Ebenen ABC, MNP trifft, und verbindet man die Füſse der Perpendikel aus A, B, auf die Ebene MNP geſenkt durch eine gerade Linie, ſo wird dieſe Linie, $\overline{AB}$ im Durchſchnitte der Ebenen ABC, MNP treffen, und dieſe Linien bilden mit den obigen Perpendikeln ähnliche rechtwinklichte Dreyecke, zu denen man

1) die beyden Perpendikel;

2) die Entfernung $\overline{AB}$ ihrer Scheitel kennt.

Man findet alſo leicht die andern Seiten dieſer Dreyecke durch dieſe Proportion. Die Differenz der beyden Perpendikel verhält ſich zu $\overline{AB}$, wie das Perpendikel aus B, zu der Entfernung des Punktes B von dem Punkte, wo $\overline{AB}$ die Ebene MNP trifft.

Eben ſo findet man die Entfernung von B, von dem Punkte, wo $\overline{AC}$ die Ebene MNP ſchneidet; verlängert man alſo die beyden Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ bis zum Durchſchnitt der Ebenen ABC, MNP, ſo bilden ſie, und dieſer Durchſchnitt ſelbſt, ein gradlinichtes Dreyeck, zu dem man die beyden Seiten, die in der Richtung von AB, AC liegen, und den Winkel an B kennt.

Man hat alſo durch das erſte Lemma das Perpendikel aus *B* auf den Durchſchnitt der beyden Ebenen, und da auch das Perpendikel aus *B* auf *MNP* bekannt iſt, ſo hat man, wenn man die Füſse dieſer beyden Perpendikel verbindet, ein rechtwinklichtes Dreyeck, deſſen Hypothenuſe und eine Cathete man kennt. Man findet alſo leicht den dieſer Cathete gegenüberſtehenden Winkel, welches der Winkel iſt, den die beyden Ebenen *ABC*, *MNP* mit einander machen.

Aufgabe XXIX.

64. Ein beliebiges Syſtem von Punkten im Raume iſt gegeben, man kennt die Entfernungen eines jeden von 3 andern willkührlich angenommenen feſten Punkten, und ſoll die Linien von einem Punkte des Syſtems zum andern finden, ferner die Winkel, welche dieſe Linien bilden, die Winkel, welche dieſe Linien mit den Ebenen machen, die durch 3 dieſer Punkte gehen, die Winkel dieſer Ebenen unter einander, das Perpendikel aus jedem Punkte des Syſtems, auf die Linie, die zwey andre verbindet, oder auf eine Ebene, in der 3 liegen, die kürzeſte Entfernung zweyer ſolcher Linien u. ſ. w.

Da man die Entfernung jedes Punktes von 3 feſten kennt, ſo ſind 9 von den 10 Linien, die dieſe 5 Punkte verbinden, gegeben, man findet alſo die 10te, welches die geſuchte Entfernung der beyden Punkte

Digitized by Google

ist, durch (58). Um die Winkel dieser Linien zu finden, braucht man die Punkte nur zu dreyen, zu betrachten, so hat man Dreyecke, deren Seiten, also auch Winkel bekannt sind. Die Endpunkte aber der Linien, die sich nicht schneiden, muss man verbinden, und sie wie die 4 Scheitelpunkte einer dreyeckichten Pyramide betrachten, deren zwey gegenüberstehende Kanten diese Linien sind, dann hat man (27) den Winkel, den sie bilden. Aus (41) findet man die kürzeste Entfernung.

Um das Perpendikel aus einem Punkte des Systems auf eine Linie zu finden, die zwey andere Punkte verbindet, braucht man nur die dritte Formel des ersten Lemma auf das Dreyeck anzuwenden, dessen Scheitel in dem Punkte ist, von dem das Perpendikel ausgehen soll, und dessen Grundlinie von den beyden andern Punkten begränzt wird.

Das Perpendikel aus einem Punkte, auf die Ebene, die durch 3 andere geht, findet man, wie die Höhe einer Pyramide, deren 6 Kanten bekannt sind.

Die verlangten Winkel findet man aus (31 fgg.).

Aufgabe XXX.

65. Wenn irgend ein System von Punkten im Raume gegeben ist, und man die Entfernung eines jeden von einem andern festen Punkte kennt (ich nenne diese Entfernung den radius vector) und ausserdem die Winkel kennt, welche dieser radius vector mit zwey festen Axen macht,

die durch ſeinen Anfangspunkt gehen, die Linien zu finden, welche alle Punkte des Syſtems zu zweyen verbinden, die Winkel, welche dieſe Linien unter ſich machen u. ſ. w.

Vergleicht man alle radii vectores zu zweyen genommen mit den beyden feſten Axen, ſo hat man 4 Linien, die von demſelben Punkt ausgehen, und dieſe 4 Linien bilden 6 Winkel, von denen 5 nach der Hypotheſe bekannt ſind. Der einzige unbekannte iſt der, den die radii vectores umfaſſen, man findet ihn durch (XXI, 50). Nachher durch das Lemma I. die Entfernungen, das andere wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe XXXI.

66. Eine dreyeckichte Pyramide iſt auf 3 unter einander rechtwinklichte Ebenen bezogen, alle Theile dieſer Pyramide in Werthen der 12 Coordinaten der Scheitelpunkte auszudrücken.

Ich behalte die Bezeichnungen der Aufgabe II fgg. und nenne auſserdem

a, a', a'', die Coordinaten von A
b, b', b'', die Coordinaten von B
c, c', c'', die Coordinaten von C
d, d', d'', die Coordinaten von D.

Dann haben wir offenbar

$$mm = (b-c)^2 + (b'-c')^2 + (b''-c'')^2$$
$$nn = (c-d)^2 + (c'-d')^2 + (c''-d'')^2$$
$$pp = (d-b)^2 + (d'-b')^2 + (d''-b'')^2$$

$$ff = (d-a)^2 + (d'-a')^2 + (d''-a'')^2$$
$$gg = (a-b)^2 + (a'-b')^2 + (a''-b'')^2$$
$$hh = (c-a)^2 + (c'-a')^2 + (c''-a'')^2$$

Subſtituirt man dieſe Werthe von *mm*, *nn*, u. ſ. w. in den Formeln, die alle Theile der Pyramide in Werthen ihrer Kanten ausdrücken, ſo hat man das geſuchte.

67. Eben das kann man auf ein Polyeder anwenden, d. h. man kann eben ſo folgende allgemeinere Aufgabe löſen:

> Wenn ein Polyeder auf 3 ſenkrechte Ebenen bezogen iſt, alle ſeine Theile in Werthen der Coordinaten, der Scheitelpunkte auszudrücken.

Es bedarf dazu nur des vorigen Verfahrens, und der Aufgabe (XXIX, 64).

So verbindet man die Methode der Dreyecke, und die der Projectionen oder Coordinaten. Jede hat eigene Vortheile; folgt man der erſten, ſo drückt man gradezu alle Theile des Syſtems in Werthen einiger aus, die hinreichen alle übrigen zu beſtimmen, wodurch man die Gegebenen immer verändern kann, indem man ſie aus den Elementen der Figur nimmt.

Hingegen bey der Methode der Projectionen fängt man damit an, alle Quantitäten des Syſtems durch die Coordinaten auszudrücken, wozu man durch allgemeine ſehr ſinnreiche Methoden gelangt, nachher muſs man aber alle dieſe Coordinaten, die nur Hülfsgröſsen ſind, eliminiren, um die Elemente der Figur dafür zu ſubſtituiren. Man darf alſo hier die Aufgabe nicht eher für gelöſt halten, bis die Elimination der Coor-

dinaten bewerkſtelligt iſt. In dieſer Elimination beſteht die hauptſächlichſte Schwierigkeit der Methode, weil man mehr Unbenannte zu eliminiren hat, als Gleichungen da ſind, ſo daſs es beſonderer analytiſcher Kunſtgriffe bedarf, um durch willkührliche Bedingungen dahin zu gelangen.

Bey der Pyramide z. B. braucht man nur 6 Gegebene, wozu wir die Kanten wählten, und ſo haben wir alle andere Quantitäten des Syſtems in Werthen dieſer gefunden.

Nach der Projectionsmethode hingegen, betrachtet man anfänglich die 12 Coordinaten der 4 Scheitelpunkte als gegeben; da man ſie aber alle eliminiren muſs, und doch nur 6 Gegebene hat (die 6 Kanten), ſo erſetzt man die fehlenden Gegebenen durch 6 willkührliche Bedingungen, die darauf beruhen, daſs, da die rechtwinklichten Ebenen, auf die man das Syſtem bezieht, willkührlich angenommen ſind, man auch den Urſprung der 3 Axen und ihre Richtungen, wo und wie man will, annehmen kann. Man muſs alſo dieſe 6 willkührlichen Bedingungen durch 6 neue Gleichungen ausdrücken, wodurch man denn endlich zur Elimination kommt.

In der Kunſt, den Umſtänden gemäſs auf die einfachſte Art die Rechnung zu führen, liegen die vorzüglichſten Hülfsquellen dieſer fruchtbaren Methode, die weſentlich auf der Kunſt beruht, das Coordinatenſyſtem zu verändern, damit man Urſprung und Richtung ſo vortheilhaft wie möglich wählen kann. Ich habe deswegen hier noch mich mit dem wichtigen Problem der Umformung der Axen, ohne

den Urſprung zu verrücken, in der gröſsten Allgemeinheit genommen, beſchäftigt. Man weiſs, daſs, um den Urſprung zu verändern, man nur eine willkührliche Conſtante zu jeder Coordinate zu addiren braucht.

Aufgabe XXXII.

68. Wenn die Lage eines Punktes im Raume durch 3 beliebige Coordinaten beſtimmt iſt, die gegebene Winkel machen, die Richtungen dieſer Coordinaten zu verändern, vorausgeſetzt, daſs man den Winkel kennt, den jede der neuen Coordinaten, mit jeder der alten macht.

Es ſey M (Fig. 12.) der gegebene Punkt, deſſen Lage im Raume durch die 3 Coordinaten

$$\overline{AP} = x$$
$$\overline{AQ} = y$$
$$\overline{AR} = z$$

beſtimmt iſt. Man betrachtet dieſe Coordinaten als gegeben, und eben ſo die Winkel, welche ſie unter einander bilden,

$$\left.\begin{aligned} P\hat{A}Q &= x\hat{}y \\ P\hat{A}R &= x\hat{}z \\ Q\hat{A}R &= y\hat{}z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

Nun bleibe der Urſprung A derſelbe, und die neuen Coordinaten ſeyen

$$\left.\begin{aligned} \overline{Ap} &= x' \\ \overline{Aq} &= y' \\ \overline{Ar} &= z' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(B)}$$

von denen jede mit den erſten die gegebenen Winkel bildet:

$$\left.\begin{aligned} p\hat{A}P &= x\hat{}x' \\ p\hat{A}Q &= y\hat{}x' \\ p\hat{A}R &= z\hat{}x' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(C)}$$

$$\left.\begin{aligned} q\hat{A}P &= x\hat{}y' \\ q\hat{A}Q &= y\hat{}y' \\ q\hat{A}R &= z\hat{}y' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(D)}$$

$$\left.\begin{aligned} r\hat{A}P &= x\hat{}z' \\ r\hat{A}Q &= y\hat{}z' \\ r\hat{A}R &= z\hat{}z' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(E)}$$

Man ſoll nun die erſten Coordinaten x, y, z, in Werthen der neuen x', y', z', und die 12 Winkel finden.

Ich bemerke zuerſt, daſs man von den Winkeln (C) nur 2 zu kennen braucht, um den 3ten zu finden. Wenn es alſo in der Aufgabe heiſst, daſs dieſe 3 Winkel gegeben ſind, ſo bedeutet das nur, daſs 2 unmittelbar gegeben ſind, und daſs der 3te durch dieſe beyden und eine Bedingungsgleichung beſtimmt iſt. Man kann dieſe Bedingungsgleichung leicht finden, denn die 4 graden Linien x, y, z, x', bilden unter einander die 6 Winkel:

$$x\hat{}y,\ x\hat{}z,\ y\hat{}z,\ x\hat{}x',\ y\hat{}x',\ z\hat{}x',$$

von denen die 3 erſten und beyden letzten nach der Hypotheſe gegeben ſind. Man kann alſo die Formel (50) darauf anwenden, wenn man ſetzt:

$$\left.\begin{array}{l} x\hat{}y = m \\ x\hat{}z = n \\ y\hat{}z = p \\ x\hat{}x' = r \\ y\hat{}x' = q \\ z\hat{}x' = s \end{array}\right\} \ldots : \text{(F)}$$

Eben ſo iſt es bey den Winkeln (D), wo man dieſelbe Bedingungsgleichung anwendet, indem man

$$\left.\begin{array}{l} x\hat{}y = m \\ x\hat{}z = n \\ y\hat{}z = p \\ x\hat{}y' = r \\ y\hat{}y' = q \\ z\hat{}y' = s \end{array}\right\} \ldots . \text{(G)}$$

Endlich iſt es auch ſo mit den Winkeln (E), wenn man

$$\left.\begin{array}{l} x\hat{}y = m \\ x\hat{}z = n \\ y\hat{}z = p \\ x\hat{}z' = r \\ y\hat{}z' = q \\ z\hat{}z' = s \end{array}\right\} \ldots : \text{(H)}$$

ſetzt. Man hat alſo, um wirklich alle als gegeben betrachtete Winkel zu beſtimmen, die doch nur implicite gegeben ſind, folgende 3 Bedingungsgleichungen:

$$1-\cos x\wedge y^2-\cos x\wedge z^2-\cos x\wedge x'^2-\cos y\wedge x'^2-\cos z\wedge x'^2$$
$$+\cos x\wedge y^2\,.\,\cos z\wedge x'^2+\cos x\wedge z^2\,.\,\cos y\wedge x'^2+\cos y\wedge z^2\,.\,\cos x\wedge x'^2$$
$$+2\cos x\wedge y\,.\,\cos x\wedge z\,.\,\cos y\wedge z+2\cos x\wedge y\,.\,\cos y\wedge x'\,.\cos x\wedge x'$$
$$+2\cos x\wedge z\,.\,\cos x\wedge x'\,.\,\cos z\wedge x'+2\cos y\wedge z\,.\,\cos y\wedge x'\,.\cos z\wedge x'$$
$$-2\cos x\wedge y\,.\,\cos x\wedge z\,.\,\cos y\wedge x'\,.\,\cos z\wedge x'-2\cos x\wedge y\,.\cos y\wedge z\,.\,\cos x\wedge x'\,.\,\cos z\wedge x'$$
$$-2\cos x\wedge z\,.\,\cos y\wedge z\,.\,\cos y\wedge y'\,.\cos x\wedge y'=0\ldots.\ (K)$$

$$1-\cos x\wedge y^2-\cos x\wedge z^2-\cos y\wedge z^2-\cos x\wedge y'^2-\cos y\wedge y'^2-\cos z\wedge y'^2$$
$$+\cos x\wedge y^2\,.\,\cos z\wedge y'^2+\cos x\wedge z^2\,.\,\cos y\wedge y'^2+\cos y\wedge z^2\,.\,\cos x\wedge y'^2$$
$$+2\cos x\wedge y\,.\,\cos x\wedge z\,.\,\cos y\wedge z+2\cos x\wedge y\,.\,\cos x\wedge y'\,.\cos y\wedge y'$$
$$+2\cos x\wedge z\,.\,\cos x\wedge y'\,.\,\cos z\wedge y'+2\cos y\wedge z\,.\,\cos y\wedge y'\,.\cos z\wedge y'$$
$$-2\cos x\wedge y\,.\,\cos x\wedge z\,.\,\cos y\wedge y'\,.\,\cos z\wedge y'-2\cos x\wedge y\,.\cos y\wedge z\,.\,\cos x\wedge y'\,.\,\cos z\wedge y'$$
$$-2\cos x\wedge z\,.\,\cos y\wedge z\,.\,\cos x\wedge y'\,.\,\cos y\wedge y'=0\ldots.\ (L)$$

$$1-\cos x\wedge y'^2-\cos x\wedge z^2-\cos x\wedge z'^2-\cos y\wedge z'^2-\cos z\wedge z'^2$$
$$+\cos x\wedge y^2\,.\,\cos z\wedge z'^2+\cos x\wedge z^2\,.\,\cos y\wedge z'^2+\cos y\wedge z^2\,.\,\cos x\wedge z'^2$$
$$+2\cos x\wedge y\,.\,\cos x\wedge z\,.\,\cos y\wedge z+2\cos x\wedge y\,.\,\cos x\wedge z'\,.\,\cos y\wedge z'$$
$$+2\cos x\wedge z\,.\,\cos x\wedge z'\,.\,\cos z\wedge z'+2\cos y\wedge z\,.\,\cos y\wedge z'\,.\cos z\wedge z'$$
$$-2\cos x\wedge y\,.\,\cos x\wedge z\,.\,\cos y\wedge z'\,.\,\cos z\wedge z'-2\cos x\wedge y\,.\cos y\wedge z\,.\,\cos x\wedge z'\,.\,\cos z\wedge z'$$
$$-2\cos x\wedge z\,.\,\cos y\wedge z\,.\,\cos y\wedge z'\,.\,\cos z\wedge z'=0\ldots.\ (M)$$

Da nun alle Winkel (A, B, C, D, E,) bekannt sind, müssen wir die ersten Coordinaten in Werthen von x', y', z', und von diesen Winkeln finden.

Dazu construire ich die beyden Parallelepipeden $APQRSMT$, $ApqrsMt$, das erste von den ersten Coordinaten, x, y, z, das zweyte von den zweyten Coordinaten x', y', z', indem ich beyde mal vom Punkte A ausgehe. Sie haben also zur gemeinschaftlichen Diagonale den Radius Vector $\overline{AM}$.

Nun zeigt die bloße Ansicht der Figur, daß $APTMtpA$ ein Sechseck sey, das nicht in einer Ebene liegt, dessen 3 erste Seiten $\overline{AP}$, $\overline{PF}$, $\overline{TM}$ die alten Coordinaten x, z, y, und die 3 andern $\overline{Ap}$, $\overline{pt}$, $\overline{tM}$ die neuen Coordinaten x', z', y', sind, und daß die Winkel, welche diese Linien bilden, diejenigen seyen, welche von den 6 Kanten $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{AR}$, $\overline{Ap}$, $\overline{Aq}$, $\overline{Ar}$ am Ursprunge A gebildet werden.

Aber man weiß, daß in jedem Vieleck, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, jede Seite der Summe der andern gleich ist, von denen jede mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt wird, den sie mit der ersten macht. So erhält man folgende drey Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x = {} & x' \cos x\hat{}x' + y' \cos x\hat{}y' + z' \cos x\hat{}z' \\ & - y \cos x\hat{}y - z \cos x\hat{}z \\ y = {} & x' \cos y\hat{}x' + y' \cos y\hat{}y' + z' \cos y\hat{}z' \\ & - x \cos y\hat{}x - z \cos y\hat{}z \\ z = {} & x' \cos z\hat{}x' + y' \cos z\hat{}y' + z' \cos z\hat{}z' \\ & - x \cos z\hat{}x - y \cos z\hat{}y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (N)$$

Gleichungen, die nur die 3 alten, die 3 neuen Coordinaten und die 9 Winkel enthalten, welche unmittelbar gegeben, oder durch die vorigen Bedingungsgleichungen beſtimmt ſind.

Um das Problem der Umformung der Coordinaten in ſeiner gröſsten Allgemeinheit zu nehmen, muſs man dieſe 3 Gleichungen auflöſen, um daraus die Werthe von x, y, z zu ziehen. Nehmen wir der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{l} \cos x\hat{}y = b \\ \cos x\hat{}z = c \\ x'\cos x\hat{}x' + y'\cos x\hat{}y' + z'\cos x\hat{}z' = d \\ \cos y\hat{}x = e \\ \cos y\hat{}z = f \\ x'\cos y\hat{}x' + y'\cos y\hat{}y' + z'\cos y\hat{}z' = h \\ \cos z\hat{}x = i \\ \cos z\hat{}y = k \\ x'\cos z\hat{}x + y'\cos z\hat{}y' + z'\cos z\hat{}z' = m \end{array}\right\} \ldots\ldots (P)$$

ſo erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{chk + bgm - dgk - bh - cm + d}{cek + bgi - gk - be - ci + 1} \\ y = \dfrac{cem + gdi - chi - gm - de + h}{cek + bgi - gk - be - ci + 1} \\ z = \dfrac{dek + bhi - bem - kh - di + m}{cek + bgi - gk - be - ci + 1} \end{array}\right\} \ldots\ldots (Q)$$

69. Sucht man die 3 Winkel $x'\hat{}y'$, $x'\hat{}z'$, $y'\hat{}z'$, welche die neuen Axen mit einander machen, ſo brauchte man nur die 6 Axen, x, y, z, x', y', z' zu vieren zu betrachten, indem man immer 2 alte und 2 neue nimmt. Da von den 6 Winkeln, welche dieſe 4 Linien bilden, 5 gegeben ſind, findet ſich der 6te durch die

Formel der Aufgabe (XXI, 50.). Z. B. den Winkel $x'^{\wedge}y'$ findet man, wenn man die 4 Axen

$x,\ y,\ x',\ y'$

oder $x,\ z,\ x',\ y'$

oder $y,\ z,\ x',\ y'$

combinirt. So erhält man folgende 3 Formeln, deren jede $x'^{\wedge}y'$ giebt, und die man nach den Umständen auswählen kann:

$$1 - cos\,x^{\vee}y^2 - cos\,x^{\wedge}x'^2 - cos\,y^{\wedge}x'^2 - cos\,x'^{\wedge}y'^2 - cos\,y^{\wedge}y'^2 - cos\,x^{\wedge}y'^2$$
$$+ cos\,xy^2 \cdot cos\,x'^{\wedge}y'^2 + cos\,x^{\wedge}x'^2 \cdot cos\,y^{\wedge}y'^2 + cos\,y^{\wedge}x'^2 \cdot cos\,x^{\wedge}y'^2$$
$$+ 2cos\,x^{\wedge}y \cdot cos\,x^{\wedge}x' \cdot cos\,y^{\wedge}x' + 2cos\,x^{\wedge}y \cdot cos\,y^{\wedge}y' \cdot cos\,x^{\wedge}y'$$
$$+ 2cos\,x^{\wedge}x' \cdot cos\,x^{\wedge}y' \cdot cos\,x'^{\wedge}y' + 2cos\,y^{\wedge}x' \cdot cos\,y^{\wedge}y' \cdot cos\,x'^{\wedge}y'$$
$$- 2cos\,x^{\wedge}y \cdot cos\,y^{\wedge}x' \cdot cos\,y^{\wedge}y' \cdot cos\,x^{\wedge}y' - 2cos\,x^{\wedge}y' \cdot cos\,y^{\wedge}x' \cdot cos\,x^{\wedge}y' \cdot cos\,x'^{\wedge}y'$$
$$- 2cos\,x^{\wedge}x' \cdot cos\,y^{\wedge}x' \cdot cos\,y^{\wedge}y' \cdot cos\,x^{\wedge}y' = o \quad \ldots\ (R)$$

$$1 - cos\,x^{\wedge}z^2 - cos\,x^{\wedge}x'^2 - cos\,z^{\wedge}x'^2 - cos\,x'^{\wedge}y'^2 - cos\,z^{\wedge}y'^2 - cos\,x^{\wedge}y'^2$$
$$+ cos\,x^{\wedge}z^2 \cdot cos\,x'^{\wedge}y'^2 + cos\,x^{\wedge}x'^2 \cdot cos\,z^{\wedge}y'^2 + cos\,z^{\wedge}x'^2 \cdot cos\,x^{\wedge}y'^2$$
$$+ 2cos\,x^{\wedge}z \cdot cos\,x^{\wedge}x' \cdot cos\,z^{\wedge}x' + 2cos\,x^{\wedge}z \cdot cos\,z^{\wedge}y' \cdot cos\,x^{\wedge}y'$$
$$+ 2cos\,x^{\wedge}y' \cdot cos\,x^{\wedge}x' \cdot x'^{\wedge}y' + 2cos\,z^{\wedge}x' \cdot cos\,z^{\wedge}y' \cdot cos\,x'^{\wedge}y'$$
$$- 2cos\,x^{\wedge}z \cdot cos\,x^{\wedge}x' \cdot cos\,z^{\wedge}y' \cdot cos\,x'^{\wedge}y' - cos\,x^{\wedge}z \cdot cos\,z^{\wedge}x' \cdot cos\,x^{\wedge}y' \cdot cos\,x'^{\wedge}y'$$
$$- 2cos\,x^{\wedge}x' \cdot cos\,z^{\wedge}x' \cdot cos\,z^{\wedge}y' \cdot cos\,x^{\wedge}y' = o \quad \ldots\ (S)$$

$$1 - cof y^{\wedge} z^2 - cof y^{\wedge} x'^2 - cof z^{\wedge} x'^2 - cof z^{\wedge} y'^2 - cof x^{\wedge} y'^2 - cof y^{\wedge} y'^2$$
$$+ cof y^{\wedge} z^2 \cdot cof x'^{\wedge} y'^2 + cof y^{\wedge} x'^2 \cdot cof z^{\wedge} y^2 + cof z^{\wedge} x'^2 \cdot cof y^{\wedge} y'^2$$
$$+ 2cof y^{\wedge} z \cdot cof y^{\wedge} x' \cdot cof z^{\wedge} x' + 2cof y^{\wedge} z \cdot cof z^{\wedge} y' \cdot cof y^{\wedge} y'$$
$$+ 2cof y^{\wedge} x' \cdot cof y^{\wedge} y' \cdot cof x'^{\wedge} y' + 2cof z^{\wedge} x \cdot cof z^{\wedge} y' \cdot cof x'^{\wedge} y'$$
$$- 2cof y^{\wedge} z \cdot cof y^{\wedge} x' \cdot cof z^{\wedge} y' \cdot cof x'^{\wedge} y' - 2cof y^{\wedge} x' \cdot cof z^{\wedge} x' \cdot cof z^{\wedge} y' \cdot cof y^{\wedge} y'$$
$$- 2cof y^{\wedge} z \cdot cof z^{\wedge} x' \cdot cof y^{\wedge} y' \cdot cof x'^{\wedge} y' = 0 \quad \ldots\ldots (T)$$

70. Sind die 3 erſten Coordinaten rechtwinklicht, wie man gewöhnlich annimmt, ſo hat man

$$cof x^{\wedge} y = 0$$
$$cof x^{\wedge} z = 0$$
$$cof y^{\wedge} z = 0$$

Alle Glieder alſo der Formeln (N), die das Zeichen — haben, verſchwinden, und die Formeln verwandeln ſich in

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cdot cof x^{\wedge} x' + y' cof x^{\wedge} y' + z' cof x^{\wedge} z' \\ y = x' cof y^{\wedge} x' + y' cof y^{\wedge} y' + z' cof y^{\wedge} z' \\ z = x' cof z^{\wedge} x' + y' cof z^{\wedge} y' + z' cof z^{\wedge} z' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (U)$$

Die Bedingungsgleichungen (*K*, *L*, *M*) verwandeln ſich in

$$\left.\begin{array}{l} cof x^{\wedge} x'^2 + cof y^{\wedge} x'^2 + cof z^{\wedge} x'^2 = 1 \\ cof x^{\wedge} y'^2 + cof y^{\wedge} y'^2 + cof z^{\wedge} y'^2 = 1 \\ cof x^{\wedge} z'^2 + cof y^{\wedge} z'^2 + cof z^{\wedge} z'^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (V)$$

Und die Gleichungen (*R*, *S*, *T*) mit einander verbunden, und nach und nach auf die andern Winkel

kel $x'\hat{}z'$, $y'\hat{}z'$ angewandt, kommen auf die 3 folgenden zurück:

$$\left.\begin{aligned} cof\,x'\hat{}y' &= cof\,x\hat{}x' \,.\, cof\,x\hat{}y' + cof\,y\hat{}x' \\ &\quad .\, cof\,y\hat{}y' + cof\,z\hat{}x' \,.\, cof\,z\hat{}y' \\ cof\,x'\hat{}z' &= cof\,x\hat{}x' \,.\, cof\,x\hat{}z' + cof\,y\hat{}x' \\ &\quad .\, cof\,y\hat{}z' + cof\,z\hat{}x' \,.\, cof\,z\hat{}y' \\ cof\,y'\hat{}z' &= cof\,x\hat{}y' \,.\, cof\,x\hat{}z' + cof\,y\hat{}y' \\ &\quad .\, cof\,y\hat{}z' + cof\,z\hat{}y' \,.\, cof\,z\hat{}z' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (X)$$

71. Wenn man ſtatt der Winkel $x\hat{}y$, $x\hat{}z$, $y\hat{}z$, die Winkel kennt, welche die Ebenen Axy, Axz, Ayz, welche zwey von den von A ausgehenden Kanten enthalten, bilden, und die ich ſo bezeichne:

$$\overline{Axy}\hat{}\overline{Axz},\quad \overline{Axy}\hat{}\overline{Ayz},\quad \overline{Axz}\hat{}\overline{Ayz}$$

ſo braucht man nur die Formeln des Lemma II. zu nehmen, und man hat

$$cof\,x\hat{}y = \frac{cof\,\overline{Axz}\hat{}\overline{Ayz} + cof\,\overline{Axy}\hat{}\overline{Axz} \,.\, cof\,\overline{Axy}\hat{}\overline{Ayz}}{sin\,\overline{Axy}\hat{}\overline{Axz} \,.\, sin\,\overline{Axy}\hat{}\overline{Ayz}}$$

Eben ſolche Formeln hat man für $cof\,x\hat{}z$, $cof\,y\hat{}z$, die man nur in den vorigen zu ſubſtituiren braucht, um die Werthe der alten Coordinaten in Werthen der neuen, und bekannter Winkel zu haben.

Verſuch einer Theorie der Transverſalen.

1. Eine grade Linie oder eine Curve, die auf irgend eine Art ein Syſtem von andern Linien, Ebenen oder krummen Oberflächen durchſchneidet, heiſst mir eine Transverſale. In dieſem Verſuche handle ich nur von graden und Kreis-Transverſalen.

Oft kann man aus dieſer Theorie für verwickelte Aufgaben einfache und elegante Auflöſungen ziehn, ſo daſs ſie wohl in die gewöhnlichen Elemente der Geometrie aufgenommen zu werden verdiente.

2. Im Grunde iſt dieſe Theorie mit der der Coordinaten einerley. Wenn MOM' (Fig. 13.) eine Curve iſt, die auf zwey rechtwinklichte Axen $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, bezogen wird (den Urſprung in A geſetzt), AP, PM die Coordinaten von M ſind, und durch M zwiſchen den Axen eine beliebige Transverſale $p\overline{Mq}$ unter einem gegebenen Winkel $\hat{ApM}$ gezogen wird, ſo geben die ähnlichen Dreyecke pPM, pAq

$$\overline{PM} = \overline{pM} \cdot \frac{\sin \hat{PpM}}{\sin \hat{pPM}}$$

$$\overline{QM} = \overline{qM} \cdot \frac{\sin \hat{QqM}}{\sin \hat{qQM}}$$

nennt man alſo

x, y die Coordinaten $\overline{AP}$, $\overline{PM}$;

x', y' die entſprechenden Theile $\overline{pM}$, $\overline{qM}$ der Transverſale;

a, b die gegebenen Winkel $P\hat{A}a$, $A\hat{p}q$,

ſo werden die vorigen Gleichungen

$$y = y' \cdot \frac{\sin b}{\sin a}$$

$$x = x' \cdot \frac{\sin (a + b)}{\sin a}$$

Man ſieht alſo, daſs, wenn man für die Coordinaten x, y, in der Gleichung der Curve MoM' dieſe Werthe ſetzt, man eine Gleichung von demſelben Grade zwiſchen x', y', d. h. zwiſchen den Theilen $\overline{Mp}$, $\overline{Mq}$ der Transverſale $\overline{pMM'q}$ erhalten wird.

So iſt die Theorie der Transverſalen eigentlich nur die Theorie der Coordinaten, welche man, ſtatt ſie einen Winkel bilden zu laſſen, auf derſelben Linie genommen hat. So vereinfacht man, weil der Grad der Gleichung nicht erhöht wird, und man den Urſprung und die Richtung der Transverſalen verändern kann, wie den Urſprung und die Richtung der Coordinaten.

Lehrſatz I.

3. Wenn die 3 Seiten eines Dreyecks oder ihre Verlängerungen von einer beliebigen Transverſale geſchnitten werden, ſo entſtehen in der Richtung jeder Seite des Dreyecks zwey durch die Transverſale gebildete Segmente von der Beſchaffenheit, daſs das Product dreyer von ihnen, die

keinen gemeinſchaftlichen Endpunkt haben, immer dem Product der 3 andern gleich iſt.

Beweis.

ABC (Fig. 14, 15, 16, 17.) ſey das gegebene Dreyeck, $\overline{abc}$ die Transverſale in der Ebene des Dreyecks, welche die Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ in a, b, c ſchneidet, ſo ſind die Segmente zwiſchen der Transverſale und den Winkeln in der Richtung der Seite,

auf $\overline{AB}$ . . . . $\overline{Ac}$, $\overline{Bc}$
auf $\overline{AC}$ . . . . $\overline{Ab}$, $\overline{Cb}$
auf $\overline{BC}$ . . . . $\overline{Ba}$, $\overline{Ca}$

Man ſoll beweiſen, daſs

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb}.$$

Durch den Scheitel eines der Winkel des Dreyecks, z. B. durch B, ziehe man eine Parallele mit der gegenüberſtehenden Seite $\overline{AC}$, welche die Transverſale in h ſchneidet. Dann haben wir

$$\frac{\overline{Ab}}{\overline{Ac}} = \frac{\overline{Bh}}{\overline{Bc}}$$

$$\frac{\overline{Ca}}{\overline{Cb}} = \frac{\overline{Ba}}{\overline{Bh}}$$

multipliciren wir die Gleichung, ſo haben wir noch leichtere Reductionen:

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb} \ldots . \text{(A)}$$

Derſelbe Beweis gilt, die Transverſale mag die Fläche des Dreyecks durchſchneiden oder nicht.

Dieſer Lehrſatz, der Grundſatz der ganzen Theorie der Transverſalen kann ſehr generaliſirt werden,

denn er erſtreckt ſich, wie man aus den folgenden Lehrſätzen ſehen wird, auf alle Vielecke, mögen ſie in einer Ebene liegen oder nicht, ſelbſt auf ſphäriſche.

4. Die 3 Seiten des Dreyecks und die Transverſale können wie die 4 Seiten eines Vierecks $BCbc$ betrachtet werden, und jede Seite dieſes Vierecks kann wieder als Transverſale betrachtet werden, ſo erhalten wir folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \overline{Ab}\,.\,\overline{Bc}\,.\,\overline{Ca} &= \overline{Ac}\,.\,\overline{Ba}\,.\,\overline{Cb} \\ \overline{AB}\,.\,\overline{Cb}\,.\,\overline{ac} &= \overline{AC}\,.\,\overline{Bc}\,.\,\overline{ab} \\ \overline{Ac}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{ab} &= \overline{AB}\,.\,\overline{Ca}\,.\,\overline{bc} \\ \overline{AC}\,.\,\overline{Ba}\,.\,\overline{bc} &= \overline{Ab}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{ac} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (B)$$

Doch ſind dieſe 4 Gleichungen eigentlich nur 3 weſentlich verſchiedene, denn wenn man z. B. die 3 erſten multiplicirt, erhält man die vierte.

5. Multiplicirt man die erſte und die dritte, ſo erhält man

$$\overline{BC}\,.\,\overline{Bc}\,.\,\overline{bA}\,.\,\overline{ba} = \overline{bC}\,.\,\overline{bc}\,.\,\overline{BA}\,.\,\overline{Ba} \ldots\ldots (C)$$

oder

$$\frac{\overline{BC}\,.\,\overline{Bc}}{\overline{bC}\,.\,\overline{bc}} = \frac{\overline{BA}\,.\,\overline{Ba}}{\overline{bA}\,.\,\overline{ba}} \ldots\ldots (D)$$

6. Eine Formel derſelben Art erhält man, wenn man 2 von den andern Gleichungen multiplicirt, und da die Punkte B, C, b, c willkührlich angenommen werden, ſo ſind dieſe Formeln auf die Figur anwendbar, die wir in der Geometrie der Stellung vollſtändiges Viereck nannten. Ein ſolches vollſtändiges Vier-

eck ist *ABFCGDA* (Fig. 18.), das aus den 3 einfachen Vierecken *ABCD*, *AFCG*, *BFDG* besteht.

Lehrsatz II.

7. Wenn alle Seiten eines ebenen Vielecks, oder deren Verlängerung von einer beliebigen Transversale geschnitten werden, so entstehen auf jeder Seite oder deren Verlängerung zwey durch die Transversale gebildete Segmente, von der Beschaffenheit, dass das Product aller dieser Segmente, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, dem Producte aller andern gleich ist. Jedes dieser Producte hat so viel Factoren als das Vieleck Seiten.

Beweis.

Es sey z. B. das Fünfeck *ABCDE* (Fig. 19.) durch die Transversale $\overline{mnpqr}$ geschnitten, so ist

$$\overline{Am} \cdot \overline{Bn} \cdot \overline{Cr} \cdot \overline{Dp} \cdot \overline{Eq} = \overline{Aq} \cdot \overline{Bm} \cdot \overline{Cn} \cdot \overline{Dr} \cdot \overline{Ep}$$

Um den Satz zu beweisen, wollen wir aus einem Winkel des Vielecks, z. B. aus *A*, die Diagonalen $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ nach den andern ziehen, und diese Diagonalen, und die Seiten des Vielecks verlängern, bis die Transversale sie in *m*, *n*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t* schneidet. Dann geben uns nach dem ersten Lehrsatze die Dreyecke *ABC*, *ACD*, *AED*

$$\overline{Am} \cdot \overline{Bn} \cdot \overline{Cs} = \overline{As} \cdot \overline{Bm} \cdot \overline{Cn}$$

$$\overline{As} \cdot \overline{Cr} \cdot \overline{Dt} = \overline{At} \cdot \overline{Cs} \cdot \overline{Dr}$$

$$\overline{At} \cdot \overline{Dp} \cdot \overline{Eq} = \overline{Aq} \cdot \overline{Dt} \cdot \overline{Ep}$$

multipliciren und reduciren wir, so kommt

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cr}.\overline{Dp}.\overline{Eq} = \overline{Aq}.\overline{Bm}.\overline{Cn}.\overline{Dr}.\overline{Ep} \ldots (A)$$

Dieſs Theorem generaliſirt das vorige und iſt nur ein beſonderer Fall vom folgenden.

Lehrſatz III.

8. Wenn alle Seiten eines Vielecks, das nicht in einer Ebene liegt, oder ihre Verlängerungen, von einer Transverſalebene geſchnitten werden, ſo bildet dieſe Transverſalebene auf jeder Seite, oder deren Verlängerung zwey Segmente von der Beſchaffenheit, daſs das Product aller dieſer Segmente, die keinen gemeinſchaftlichen Endpunkt haben, dem Producte der übrigen gleich iſt, wo jedes Product auch ſo viel Factoren hat, als das Vieleck Seiten.

Beweis.

Wenn man *mnpqrst* (Fig. 19.) als die Projection der Transverſalebene auf eine ihr ſenkrechte Ebene betrachtet, ſo iſt die Schluſsfolge ganz dieſelbe, wie beym vorigen Lehrſatz, und man findet eben ſo

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cr}.\overline{Dp}.\overline{Eq} = \overline{Aq}.\overline{Bm}.\overline{Cn}.\overline{Dr}.\overline{Ep} \ldots (A)$$

man muſs bemerken, daſs in dieſer Formel $\overline{Am}$, $\overline{Bn}$, u. ſ. w. die Segmente ſelbſt auf den Seiten des Vielecks, und nicht ihre Projectionen bedeuten.

Der folgende Satz zeigt, daſs der Satz auch auf den Fall ſich erſtreckt, wo die Transverſale eine Kreislinie iſt.

Lehrſatz IV.

9. Wenn alle Seiten eines ebenen Vielecks von einer beliebigen Kreis-Transverſale geſchnitten werden, ſo beſtimmt dieſer Kreis, da er jede Seite in 2 Punkten ſchneidet, 4 Segmente, zwiſchen dieſen Punkten und den Winkeln, die die Seite begränzen, und das Product der einen Hälfte dieſer Segmente, iſt gleich dem Product der andern Hälfte, wenn man ſie alle ſo wählt, daſs in einem Product keine zuſammenkommen, die einen Punkt des Kreiſes zum gemeinſchaftlichen Endpunct haben.

Beweis.

Es wird genug ſeyn, dieſen Satz für das Dreyeck zu beweiſen, da derſelbe Beweis für jedes andere Vieleck gilt. Es ſey alſo ABC (Fig. 20) das gegebene Dreyeck; a, a', b, b', c, c' ſeyen die Punkte, wo der Kreis die Seiten ſchneidet. Man ſoll beweiſen, daſs

$$\overline{Ab}.\overline{Ab'}.\overline{Bc}.\overline{Bc'}.\overline{Ca}.\overline{Ca'} = \overline{Ac}.\overline{Ac'}.\overline{Ba}.\overline{Ba'}.\overline{Cb}.\overline{Cb'} \ldots . \quad (B)$$

Aus den Anfangsgründen der Geometrie hat man

$$\overline{Ab}.\overline{Ab'} = \overline{Ac}.\overline{Ac'}$$
$$\overline{Bc}.\overline{Bc'} = \overline{Ba}.\overline{Ba'}$$
$$\overline{Ca}.\overline{Ca'} = \overline{Cb}.\overline{Cb'}$$

multiplicirt man dieſe 3 Gleichungen, ſo erhält man die Formel (A).

10. Man ſieht leicht, daſs der Beweis ſelbſt anwendbar iſt, wenn das Vieleck nicht in einer Ebene liegt, nur muſs man dann annehmen, daſs es von einer Kugeloberfläche geſchnitten wird, die die Transverſalebene des 3ten Lehrſatzes erſetzt.

Da die Ellipſe als Projection des Kreiſes betrachtet werden kann, wendet man leicht den vorigen Satz auf ſie an, weil die Projectionen der Theile einer Linie in demſelben Verhältniſs ſtehen, als dieſe Linie ſelbſt. Da nun das Verhältniſs der beyden Glieder der Gleichung (A) = 1 für den Kreis iſt, muſs es auch = 1 für die Ellipſe bleiben.

Eben ſo findet dieſer Satz ſeine Anwendung auf alle andere Kegelſchnitte, und wenn das Vieleck nicht in einer Ebene liegt, auf die Oberflächen, die durch Umdrehung dieſer Curven um ihre Axen entſtehen.

Der Satz kann noch mehr generaliſirt werden, und erſtreckt ſich dann auf alle geometriſche Curven, und alle Oberflächen, deren Durchſchnitte mit einer Ebene geometriſche Curven ſind. Da ich aber hier nur mit graden und Kreis-Transverſalen mich beſchäftige, ſo beſchränke ich mich, Gegenſtände anzuzeigen, über die man meine Geometrie der Stellung nachſchlagen kann.

Lehrſatz V.

11. Wenn man aus einem Punkte in der Ebene eines Dreyecks, auf jede Seite eine Transverſale zieht, die durch den gegen-

überſtehenden Winkel geht, ſo erhält man auf jeder Seite 2 Segmente von der Beſchaffenheit, daſs das Product dreyer, die keinen gemeinſchaftlichen Endpunkt haben, dem Product der 3 andern gleich iſt.

Beweis.

Es ſey ABC (Fig. 21, 22.) das Dreyeck, D der Punkt, $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$ ſeyen die Transverſalen, ſo ſoll man beweiſen, daſs

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb} \ldots . \quad (A)$$

Die beyden Dreyecke AaB, AaC, durch die Transverſalen Cc, Bb, geſchnitten, geben nach dem erſten Lehrſatz:

$$\overline{Ac} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{aD} = \overline{AD} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ac}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{aB} \cdot \overline{Cb} = \overline{aD} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{Ab}$$

multiplicirt man, ſo erhält man die Formel (A).

Es iſt, wie man ſieht, einerley, ob D innerhalb oder auſserhalb des Dreyecks liegt.

Lehrſatz VI.

12. In jedem vollſtändigen Viereck wird jede ſeiner 3 Diagonalen, von den beyden andern zu proportionalen Segmenten geſchnitten.

Es ſey $ABFCGDA$ (Fig. 18.) das vollſtändige Viereck, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{FG}$ ſeyen die 3 Diagonalen, die ſich in l, k, h ſchneiden, man ſoll beweiſen, daſs eine, z. B. $\overline{AC}$, in l, und h ſo geſchnitten wird, daſs

$$\frac{\overline{Al}}{\overline{Cl}} = \frac{\overline{Ah}}{\overline{Ch}}$$

Hierzu wollen wir das Dreyeck ABC betrachten, deſſen Scheitelpunkte 3 von denen des einfachen Vierecks $ABCD$ ſind, deſſen Diagonale $\overline{AC}$ iſt. Der vorige Satz giebt uns

$$\overline{Al} \cdot \overline{CG} \cdot \overline{BF} = \overline{Cl} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{AF}.$$

Da daſſelbe Dreyeck auch von der Transverſale $\overline{KFG}$ geſchnitten wird, ſo giebt der erſte Lehrſatz:

$$\overline{AF} \cdot \overline{Ch} \cdot \overline{BG} = \overline{BF} \cdot \overline{Ah} \cdot \overline{CG}$$

multipliciren wir; ſo entſteht

$$\overline{Al} \cdot \overline{Ch} = \overline{Ah} \cdot \overline{Cl} \ldots\ldots \text{(A)}$$

oder

$$\frac{\overline{Al}}{\overline{Cl}} = \frac{\overline{Ah}}{\overline{Cl}} \quad \ldots\ldots \text{(B)}$$

Eben ſo beweiſet man für die andern Diagonalen, daſs

$$\frac{\overline{Bl}}{\overline{Dl}} = \frac{\overline{Bk}}{\overline{Dk}}$$

$$\frac{\overline{Fk}}{\overline{Gk}} = \frac{\overline{Fh}}{\overline{Gh}}$$

13. Zieht man durch den Punkt k eine neue Transverſale $kB'l'D'$ die die Linien $\overline{AF}$, $\overline{Ah}$, $\overline{AG}$ in B', l', D' ſchneidet, ſo hat man

$$\frac{\overline{B'l'}}{\overline{D'l'}} = \frac{\overline{B'k}}{\overline{D'k}} \quad \ldots\ldots \text{(C)}$$

Denn wenn man ſich die Linien $\overline{GB'}$, $\overline{FD'}$ denkt, ſo bilden ſie mit $\overline{AB'}$, $\overline{AD'}$ ein neues Viereck $AB'C'D'$

welches dieſelben Eigenſchaften haben wird, als $ABCD$. Nun ſind $\overline{B'D'}$ und $\overline{FG}$ zwey ſeiner Diagonalen, alſo muſs $\overline{FG}$ in den beyden andern in proportionalen Segmenten von den beyden andern Diagonalen geſchnitten werden. Da nun eine dieſer Diagonalen durch k, die andere durch h geht, ſo fällt dieſe andere Diagonale der Richtung nach in $\overline{AC}$, d. h. der Winkel C' des neuen Vierecks fällt auf $\overline{AC}$, man hat alſo nach dem Lehrſatze die Formel (C).

Da ſich der Punkt C' auf AC befindet, ſo muſs es einerley ſeyn, welche Lage auch die Transverſale $\overline{kB'D'}$ haben mag. Die Linie $\overline{Ah}$ iſt alſo der Ort aller Punkte C, C', die aus dem Durchſchnitte der Linien, von F, G, nach D', B' gezogen, entſtehen.

Lehrſatz VII.

14. Wenn eine beliebige Linie $\overline{BD}$, in den Punkten b, d, in proportionale Segmente geſchnitten wird, und man aus einem andern Punkte des Raumes A, nach den 4 Theilungspunkten B, D, b, d, die graden Linien $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, Ab, $\overline{Ad}$ zieht, ſo wird jede andere Transverſale $B'D'$ zwiſchen $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ gezogen, wie die erſte $\overline{BD}$, auch in proportionale Segmente $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$ getheilt.

Beweis.

Wir haben (Fig. 23.) nach der Annahme

$$\frac{\overline{Bb}}{\overline{Bd}} = \frac{\overline{Db}}{\overline{Dd}}$$

nun ist

$$\overline{Bb} = \overline{AB}\,\frac{\sin B\hat{A}b}{\sin A\hat{b}B}$$

$$\overline{Bd} = \overline{AB}\,\frac{\sin B\hat{A}d}{\sin A\hat{d}B}$$

$$\overline{Db} = \overline{AD}\,\frac{\sin D\hat{A}b}{\sin A\hat{b}D}$$

$$\overline{Dd} = \overline{AD}\,\frac{\sin D\hat{A}d}{\sin A\hat{d}D}$$

substituirt man diese Werthe und reducirt, so kommt

$$\frac{\sin B\hat{A}b}{\sin B\hat{A}d} = \frac{\sin D\hat{A}b}{\sin D\hat{A}d} \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

Wenn nun dieſs Verhältniſs zwiſchen den 4 Winkeln ſtatt findet, ſo muſs die Linie $\overline{BD}$ nothwendigerweiſe in b, d, in proportionale Segmente getheilt werden, weil man ſonſt, wenn dieſs nicht der Fall wäre, den Punkt d näher oder weiter von D nehmen müſste, indem B, b, D dieſelben blieben. Aber dann wäre das Verhältniſs der Winkel nicht mehr daſſelbe. Da man es nun gegeben annimmt, ſo wird $\overline{BD}$, in B und D, in proportionale Segmente getheilt.

Daſſelbe gilt von jeder andern Linie $\overline{B'D'}$ u. ſ. w.

15. Der Beweis beſteht aus zwey Theilen, die zwey merkwürdige Sätze bilden. Der erſte:

Wenn eine Linie BD, in b, d, in proportionale Segmente getheilt iſt, und man aus einem Punkte A des Raumes

die 4 Linien $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$ zieht, so hat man

$$\frac{\sin B\hat{A}b}{\sin B\hat{A}d} = \frac{\sin D\hat{A}b}{\sin D\hat{A}d} \quad \ldots\ldots (A)$$

zweytens:

Wenn 4 Linien aus einem Punkte A ausgehen, und in derselben Ebene gezogen, 4 Winkel bilden, unter denen das eben angeführte Verhältnifs besteht, so wird jede andere Linie wie $\overline{BD}$ oder $\overline{B'D'}$, die zwischen den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ gezogen ist, von den beyden andern $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$, in proportionale Segmente getheilt.

16. Aus $\frac{\overline{Bb}}{\overline{Bd}} = \frac{\overline{Db}}{\overline{Dd}}$ folgt

$$\frac{\overline{Dd}}{\overline{Bd}} = \frac{\overline{Db}}{\overline{Bb}} \quad \ldots\ldots (B)$$

d. h. ist eine Linie $\overline{BD}$ in proportionale Segmente in den Punkten b, d, getheilt: so ist umgekehrt $\overline{db}$ in B, D, eben so getheilt. Also auch

$$\frac{\sin b\hat{A}D}{\sin d\hat{A}B} = \frac{\sin b\hat{A}D}{\sin b\hat{A}B} \quad \ldots\ldots (C)$$

17. Wir haben aus (13) gesehen, dafs die Linie $\overline{B'D'}$, zwischen $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ gezogen, und durch k gehend, in k und l in proportionale Segmente getheilt wird. Wir können jetzt den Satz generalisiren, denn wenn man $\overline{Ak}$ zieht, und durch o einen Punkt

dieſer Linie die Transverſale $\overline{ompn}$, ſo wird $\overline{mn}$ in proportionale Segmente getheilt, d. h. man hat

$$\frac{\overline{mo}}{\overline{mp}} = \frac{\overline{no}}{\overline{np}} \quad \ldots\ldots \text{(D)}$$

was aus dem Lehrſatz VII ſchon evident iſt, weil die Linie $\overline{FG}$, zwiſchen denſelben Linien $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, enthalten, welche die Linie $\overline{mn}$ begränzen, in proportionale Segmente von $\overline{Ah}$, $\overline{Ah}$ geſchnitten wird.

Lehrſatz VIII.

18. Schneidet man ein beliebiges einfaches Viereck durch eine Transverſale, ſo wird der Theil der Transverſale, der zwiſchen den Diagonalen liegt, in proportionale Segmente von den beyden Linien getheilt, die man aus dem Durchſchnittspunkt der Diagonalen, zu den beyden Punkten zieht, wo die gegenüberſtehenden Seiten des Vierecks zuſammenfloſſen.

Beweis.

Wenn $AECD$ (Fig. 24.) das Viereck iſt, ſo ſoll man beweiſen, daſs $\overline{mn}$ in p, q in dem verlangten Verhältniſs geſchnitten werde, d. h. daſs

$$\frac{\overline{mp}}{\overline{mq}} = \frac{\overline{np}}{\overline{nq}}$$

Die 3 Diagonalen des vollſtändigen Vierecks $CDAHBCG$ ſind $\overline{HG}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$, welche alle nach dem 6ten Lehrſatze ſo geſchnitten ſind. Wendet man dieſen Grundſatz auf die Diagonale $\overline{AB}$ an, ſo findet

man, dafs ſie in den Punkten o, E, von den beyden andern Linien geſchnitten wird, die von K ausgehen, alſo wird nach dem VII. Lehrſatz jede andere Transverſale wie $\overline{mn}$, die zwiſchen $\overline{KA}$, $\overline{KB}$ liegt, durch $\overline{KG}$, $\overline{KF}$ in proportionale Segmente getheilt, d. h. man hat

$$\frac{\overline{mp}}{\overline{mq}} = \frac{\overline{np}}{\overline{nq}} \quad \ldots \quad (A)$$

Lehrſatz IX.

19. Wenn eine Linie der gemeinſchaftliche Durchſchnitt von 4 verſchiedenen Ebenen iſt, und man willkührlich zwiſchen 2 dieſer Ebenen eine Transverſale gezogen hat, und dieſe Transverſale von den andern beyden Ebenen in proportionale Segmente getheilt wird, ſo wird jede andere zwiſchen den beyden erſten gezogene Transverſale von den beyden letzten eben ſo getheilt.

Beweis.

Wir wollen annehmen, das ganze Syſtem ſey auf eine Ebene projicirt, die ſenkrecht auf der Linie ſteht, welche den 4 gegebenen Ebenen zum Durchſchnitt dient. A (Fig. 25.) ſey die Projection des Durchſchnitts, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$ die der Ebenen, $\overline{BD}$ die Linie, die zwiſchen den Ebenen $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ gezogen, und in b, d, in proportionale Segmente getheilt iſt, endlich $\overline{B'D'}$ irgend eine andere Transverſale zwiſchen den Ebenen $\overline{AB}$, AD, welche von den andern

andern in b', d' geſchnitten wird. Man ſoll beweiſen, daſs

$$\frac{\overline{B'b'}}{\overline{Bd'}} = \frac{\overline{Db'}}{\overline{Dd'}}$$

Ich ziehe die Linie $\overline{B'd}$, und führe durch $\overline{Bd}$, $\overline{Bd'}$, eine Ebene, welche die Linie A irgendwo ſchneidet. Wo dieſer Durchſchnitt auch liegen mag, ſo wird $B'D''$ (14) in b'', d'' in proportionale Segmente getheilt. Führen wir nun durch $\overline{B'd}$, $\overline{B'd'}$ eine neue Ebene, die auch A irgendwo ſchneiden wird, ſo wird, wo dieſer Durchſchnitt auch liegt, da $\overline{B'D''}$ in proportionale Segmente getheilt iſt, $\overline{B'D'}$ gleichfalls in b', d' ſo getheilt werden, alſo

$$\frac{\overline{B'b'}}{\overline{Bd'}} = \frac{\overline{D'b'}}{\overline{D'd'}} \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

20. Daraus folgt, daſs, wenn 4 Ebenen AB, Ab, AD, Ad, einen gemeinſchaftlichen Durchſchnitt A haben, das Verhältniſs der Winkel, die ſie bilden, folgendes iſt:

$$\frac{\sin B\hat{A}b}{\sin B\hat{A}d} = \frac{\sin D\hat{A}b}{\sin D\hat{A}d}$$

Daſſelbe Verhältniſs beſteht zwiſchen den Winkeln, die von den Durchſchnitten dieſer 4 Ebenen mit einem 5ten gebildet werden.

Lehrſatz X.

21. Wenn man aus einem Punkte A auſserhalb einer Linie $\overline{BK}$ (Fig. 26.) zu dieſer Linie ſoviel andere Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ zieht, als man will, und nachdem man

aus K eine Transverſale $\overline{Kb}$ gezogen hat, die alle dieſe Linien, von A an gerechnet, in b, c, d, e ſchneidet, dann die Diagonalen $\overline{Bc}$, $\overline{Cb}$, $\overline{Cd}$, $\overline{Dc}$ u. ſ. w. aller Vierecke $BCcb$, $CDdc$, $BDdb$, u. ſ. w. zieht, ſo ſind alle Durchſchnittspunkte der Diagonalen deſſelben Vierecks als m, n, p, u. ſ. w. in einer und derſelben graden Linie, die auch durch K geht.

Beweis.

Wir wollen z. B. den Punkt m nehmen; die Linie $\overline{Km}$ iſt eine Diagonale des vollſtändigen Vierecks $KcbmBCK$, die andern beyden ſind $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$. Nach dem 6ten Lehrſatz wird jede von den beyden andern in proportionalen Segmenten geſchnitten; wenn alſo $\overline{Km}$, $\overline{Bb}$ in K' ſchneidet, ſo ſchneiden die Punkte A und K' dieſe Linie Bb im angeführten Verhältniſs. Es wird alſo auch nach Lehrſatz 7 jede der andern Linien $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$, von $\overline{Km}$ ſo geſchnitten.

Aus demſelben Grunde muſs $\overline{Kn}$ die Linien $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$ ſo ſchneiden, u. ſ. w.

Alſo bilden alle Linien $\overline{Km}$, $\overline{Kn}$, $\overline{Kp}$ nur eine und dieſelbe Linie, die von K ausgeht.

Lehrſatz XI.

22. Wenn aus einem Punkte A auſserhalb einer Ebene, welche durch die Linie $\overline{EH}$ vorgeſtellt wird, zu dieſer Ebene ſo viele Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ als man will,

gezogen werden, und man aufserdem eine Transverfal-Ebene führt, (vorgeftellt durch $\overline{bK}$, deren Durchfchnitt mit der erften, K,) welche die Linien von A, zu b, c, d, e gezogen, fchneidet, dann in jedem fo entftandenen Viereck $BCcb$, $CDdc$, u. f. w. die beyden Diagonalen $\overline{Bc}$, $\overline{Cb}$, $\overline{Cd}$, $\overline{Dc}$ u. f. w. zieht; fo find alle Durchfchnittspunkte m, n, p, u. f. w. diefer Diagonalen in einer und derfelben Ebene, die auch durch die Durchfchnittslinie K, der Ebenen BK, bK geht.

Beweis.

Wir wollen durch K und m eine Ebene führen, welche die Ebene, welche $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ enthält, in $\overline{Km}$ fchneiden foll; dann folgt aus dem 6ten Lehrfatz, dafs, wenn K' der Durchfchnittspunkt diefer Linie $\overline{Km}$ mit $\overline{Bb}$ ift, $\overline{Bb}$ in den Punkten A, K' in proportionale Segmente getheilt wird, alfo werden nach dem 8ten Lehrfatz alle andere Linien $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$ zwifchen die Ebenen KB, Kb, eben fo durch die Ebene $\overline{Kk'}$ und den Punkt A getheilt.

Aus demfelben Grunde fchneidet die Ebene, welche durch K und n geht, mit dem Punkte A, alle Linien $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$ eben fo u. f. w.

Alfo find die Ebenen, die durch K, und m, n, p, gehen, nur eine und diefelbe Ebene.

Lehrſatz XII.

23. Wenn man auf jeder Kante einer dreyeckichten Pyramide *ABCD*, die von *A* ausgehen, willkührlich die Punkte *m*, *n*, *p*, nimmt (Fig. 27.), um das Dreyeck *mnp* zu bilden, und nachdem man die Diagonalen $\overline{Bn}$, $\overline{Cm}$, $\overline{Cp}$, $\overline{Dn}$, $\overline{Dm}$, $\overline{Bp}$ gezogen hat, noch durch *A*, und die Durchſchnittspunkte *D'*, *B'*, *C'*, die Transverſalen $\overline{Aa}$, $\overline{Aa'}$, $\overline{Aa''}$ zieht, ſo werden

1) Die Transverſalen $\overline{Da}$, $\overline{Ba'}$ $\overline{Ca''}$ ſich in einem und demſelben Punkt *A'* der Grundfläche ſchneiden;

2) Die 4 Transverſalen $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ $\overline{DD'}$, in einem und demſelben Punkt *K'* des Raums;

3) Die Ebene, welche durch *B'C'*, *D'*, geht, und die beyden andern Ebenen *BCD*, *bcd*, werden alle 3 einen gemeinſchaftlichen Durchſchnitt haben.

Beweis.

Nach dem fünften Lehrſatz geben die 3 Dreyecke *ABC*, *ACD*, *ABD*:

$$\overline{Am} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cn} = \overline{An} \cdot \overline{Bm} \cdot \overline{Ca}$$

$$\overline{An} \cdot \overline{Ca'} \cdot \overline{Dp} = \overline{Ap} \cdot \overline{Cn} \cdot \overline{Da'}$$

$$\overline{Ap} \cdot \overline{Da''} \cdot \overline{Bm} = \overline{Am} \cdot \overline{Dp} \cdot \overline{Ba''}$$

Multiplicirt man, ſo kommt

$$\overline{Ba} \cdot \overline{Ca'} \cdot \overline{Da'} = \overline{Ca} \cdot \overline{Da'} \cdot \overline{Ba''}$$

woraus nach demſelben Lehrſatze folgt, daſs die 3 Transverſalen $\overline{Da}$, $\overline{Ba'}$, $\overline{Ca''}$ ſich in einem Punkte A' ſchneiden.

Ziehen wir nun $\overline{AA'}$, ſo iſt dieſe Linie zugleich in den Ebenen ADa, ABa', ACa'. Da nun $\overline{Aa}$, durch D' den Durchſchnittspunkt von $\overline{Cm}$, $\overline{Bn}$ geht, ſo iſt $\overline{DD'}$ in derſelben Ebene, die $\overline{AA'}$ enthält, und wird alſo AA' ſchneiden. Eben ſo beweiſt man, daſs $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ ſich zu zweyen ſchneiden. Alſo ſchneidet $\overline{CC'}$ z. B. die nicht in der Ebene ADa iſt, welche $\overline{AA'}$, $\overline{DD'}$ enthält, doch beyde, welches nur geſchehen kann, indem ſie durch ihren Durchſchnittspunkt geht. Alſo ſchneiden $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ ſich in einem Punkte.

Wenn wir durch B', den Durchſchnittspunkt von $\overline{Cp}$, $\overline{Dn}$, und den Durchſchnittspunkt von $\overline{CD}$, $\overline{np}$ eine Transverſale ziehen, ſo wird ſie (12.) mit dem Punkte $\overline{A}$, $\overline{Cn}$, $\overline{Dp}$ in proportionale Segmente theilen. Eben ſo theilt die Transverſale durch C', und den Durchſchnittspunkt von $\overline{Bp}$, $\overline{Dm}$, die Linien $\overline{Bm}$, $\overline{Dp}$. Alſo geht die Ebene, die B', C', und den Punkt enthält, wo $\overline{Dp}$ von A und den erwähnten Transverſalen in proportionale Segmente getheilt wird, durch die Durchſchnittspunkte der Linien $\overline{CD}$ und $\overline{np}$, $\overline{BD}$ und $\overline{mp}$, und folglich durch den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt der Ebenen BCD, mnp. Man beweiſet eben ſo, daſs D' in derſelben Ebene liegt, alſo hat die Ebene die B', C', D' eine und dieſelbe Durchſchnittslinie mit den Ebenen BCD, mnp.

Man kann noch bemerken, daſs derſelbe Beweis ſtatt findet, ohne Unterſchied, ob m, n, p auf den Kanten ſelbſt oder auf deren Verlängerungen liegen. So kann man A, B, C, D, K als 5 willkührlich im Raume angenommene Punkte betrachten, auf die man, wenn man immer 4 davon nimmt, alles anwenden kann, was von der Pyramide $ABCD$ geſagt iſt.

Die Punkte α', β', γ', wo ſich die correſpondirenden Seiten:

$$\overline{Bc},\ \overline{mn}$$
$$\overline{BD},\ \overline{mp}$$
$$\overline{CD},\ \overline{np}$$

der Dreyecke BCD, mnp ſchneiden, ſind offenbar alle 3 im Durchſchnitte der beyden Ebenen, und folglich in einer graden Linie, welche Winkel auch immer $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ machen. Nähert ſich alſo AC unmerklich der Ebene ABD, bis ſie hineinfällt, ſo hören α', β', γ' darum nicht auf in grader Linie zu ſeyn. Daraus folgt im Allgemeinen, wenn man aus einem beliebigen Punkte A, in einer Ebene 3 Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ zieht, und zwey Dreyecke BCD, mnp bildet, von denen jedes ſeine 3 Winkel auf dieſen 3 Linien, die von A ausgehen, oder auf ihren Verlängerungen hat, ſo werden die 3 Durchſchnittspunkte α', β', γ', der correſpondirenden Seiten dieſer Dreyecke immer in grader Linie ſeyn.

Eben ſo müſſen, wenn man die 3 Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ in einer Ebene annimmt, und die Diagonalen $\overline{Bu}$, $\overline{Cm}$, $\overline{Cp}$, $\overline{Dn}$, $\overline{Bp}$, $\overline{Dm}$ zieht, deren Durch-

ſchnittspunkte D', B', C' ſind, die 3 Linien $\overline{DD'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, ſich alle in einem Punkte K ſchneiden.

24. Die Theorie der graden Transverſalen, welche wir entwickelt haben, erſtreckt ſich leicht auf die ſphäriſchen Transverſalen, d. h. alles, was wir von ebenen Vielecken geſagt haben, erſtreckt ſich auf Vielecke, die durch Bogen gröſster Kreiſe auf der Oberfläche einer Kugel gebildet werden, wenn man die Sinus der Bogen für die Seiten des ebenen Vielecks ſetzt.

Wird z. B. ein ſphäriſches Dreyeck ABC (Fig. 29.) durch einen Transverſalbogen abc geſchnitten, ſo wird jeder Bogen AB, AC, BC in 2 Segmente getheilt, und das Product der Sinus dreyer dieſer Segmente, die keinen gemeinſchaftlichen Endpunkt haben, wird dem Product der 3 andern gleich ſeyn, d. h.

$$\sin Ac \cdot \sin Ba \cdot \sin Cb = \sin Ab \cdot \sin Bc \cdot \sin Ca \ldots \text{(A)}$$

Man hat nämlich aus den ſphäriſchen Dreyecken Acb, Bac, Cab

$$\frac{\sin Ac}{\sin Ab} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

$$\frac{\sin Ba}{\sin Bc} = \frac{\sin c}{\sin a}$$

$$\frac{\sin Cb}{\sin Ca} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

Multiplicirt man dieſe 3 Gleichungen, ſo kommt man auf die Gleichung (A).

25. Eben ſo wenn man in einem ſphäriſchen Dreyeck ABC einen Punkt D nimmt, und durch ihre

3 Bogen gröfster Kreife *Aa, Bb, Cc* zieht, die durch die Winkel gehen, fo hat man (Fig. 30.)

$$\sin Ac . \sin Ba . \sin Cb = \sin Ab . \sin Ca . \sin Bc \ldots (B)$$

26. Eben fo wenn man ein fphärifches Viereck *ABCD* hat, und die 3 Diagonalen *AB, CD, FG* (Fig. 31.) zieht, fo wird jede diefer Diagonalen von den beyden andern in Segmente getheilt, deren Sinus proportional find, d. h. wenn man z. B. durch *l, h,* die Durchfchnittspunkte der Diagonale *AC,* und der beyden andern *BD, GF* bezeichnet, fo hat man

$$\frac{\sin Al}{\sin Ah} = \frac{\sin Cl}{\sin Ch} \ldots . (C)$$

Ich glaube nicht, dafs es, nach dem, was über grade Transverfalen gefagt ift, nöthig feyn wird, diefen Satz zu beweifen, oder die Analogie beyder Arten der Transverfalen weiter zu treiben, mag der Lefer, wenn er es der Mühe werth hält, feinen Scharfünn daran üben.

Schlufs.

27. Diefs find die allgemeinen Grundzüge der Theorie der Transverfalen, ich werde jetzt nur noch einige Anwendungen, deren fie fähig ift, andeuten.

Es feyen *A, B, C,* (Fig. 32.) die Mittelpunkte dreyer Kreife, die in einer Ebene befchrieben find. Wir wollen uns Linien vorftellen, die diefe Kreife zu zweyen äufserlich berühren; *a, b, c* feyen die Punkte, wo diefe Tangente die verlängerten Linien durch die Mittelpunkte fchneiden, d. h. *a* ift der Punkt, wo die Linie *BC* von der äufsern Tangente der Kreife

B, C geſchnitten wird u. ſ. w., dann werden die Punkte a, b, c in einer graden Linie liegen, wie Monge aus blos geometriſchen Betrachtungen, die ſich auf die Geometrie dreyer Dimenſionen beziehen, gefunden hat. Denn wenn wir A, B, C den Halbmeſſer der vorhin ſo bezeichneten Kreiſe nennen, ſo müſſen die Entfernungen $\overline{Ba}$, $\overline{Ca}$, den Halbmeſſern B, C porportional ſeyn u. ſ. w. Wir haben alſo:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Ac}}{\overline{Bc}}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\overline{Ba}}{\overline{Ca}}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{\overline{Cb}}{\overline{Ab}}$$

Multiplicirt man dieſe 3 Gleichungen, ſo kommt

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb}$$

was nach dem erſten Lehrſatze nicht Statt haben kann, wenn nicht a, b, c in einer graden Linie liegen.

Wir wollen jetzt die innern Tangenten betrachten. Es ſeyen a', b', c' die Punkte, wo dieſe Tangenten die Linien durch die Mittelpunkte ſchneiden, dann haben wir wie vorhin:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Ac'}}{\overline{Bc'}}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\overline{Ba'}}{\overline{Ca'}}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{\overline{Cb'}}{\overline{Ab'}}$$

und daraus

$$\overline{Ab'} \cdot \overline{Bc'} \cdot \overline{Ca'} = \overline{Ac'} \cdot \overline{Ba'} \cdot \overline{Cb'}$$

was nach dem 5ten Lehrſatze beweiſet, daſs, wenn man die 3 Transverſalen $\overline{Aa'}$, $\overline{Bb'}$, $\overline{Cc'}$ zieht, ſie ſich alle in einem Punkte D durchſchneiden werden.

Weil wir haben

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Ac}}{\overline{Bc}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Ac'}}{\overline{Bc'}}$$

ſo haben wir auch

$$\frac{\overline{Ac}}{\overline{Bc}} = \frac{\overline{Ac'}}{\overline{Bc'}}$$

Die Linie AB iſt alſo durch die Punkte c, c' in proportionale Segmente getheilt, was nach dem 6ten Lehrſatze beweiſet, daſs die Punkte a', b', c' in grader Linie liegen, aus demſelben Grunde auch die Punkte c', a', b, und c', b', a.

Man kann dieſelbe Theorie auf den Fall anwenden, wo die 3 gegebenen Kreiſe ſich auf der Oberfläche einer Kugel befänden, man braucht dann nur auf Bogen gröſster Kreiſe anzuwenden, was wir von graden Linien geſagt haben.

28. Es ſeyen A, B, C, D die Mittelpunkte von 4 Kugeln. Wir wollen uns vorſtellen, dieſe Kugeln ſeyen äuſserlich zu zweyen von berührenden coniſchen Oberflächen eingehüllt, ſo entſtehen daraus 6 verſchiedene Kegel. Die Spitzen dieſer 6 Kegel m, n, p, q, r, s, werden in derſelben Oberfläche liegen.

Denn wenn A, B, C, D die Halbmeſſer der ſo benannten 4 Kugeln bedeuten, ſo haben wir offenbar folgende Gleichungen:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Am}}{\overline{Bm}}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\overline{Bn}}{\overline{Cn}}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{\overline{Cp}}{\overline{Dp}}$$

$$\frac{D}{A} = \frac{\overline{Dq}}{\overline{Aq}}$$

Multiplicirt man, ſo kommt

$$\overline{Am} \cdot \overline{Bn} \cdot \overline{Cp} \cdot \overline{Dq} = \overline{Aq} \cdot \overline{Bm} \cdot \overline{Cn} \cdot \overline{Dp}$$

woraus nach dem dritten Lehrſatze folgt, daſs die 4 Punkte m, n, p, q, die die Segmente der Seiten des Vierecks $ABCD$, das nicht in einer Ebene liegt, begränzen, in derſelben Ebene ſind. Derſelbe Beweis wird auf alle Punkte m, n, p, q, r, s, zu vieren genommen, angewendet. Alle dieſe Punkte liegen alſo in einer Ebene, und noch mehr, beliebige 3 von ihnen liegen in einer graden Linie, weil es z. B. offenbar iſt, daſs die 3 Punkte m, n, r, im Durchſchnitt der ebenerwähnten allgemeinen Ebene, und der Ebene des Dreyecks ABC liegen.

Wir wollen jetzt die Punkte m', n', p', q', r', s' betrachten, die Scheitelpunkte der Kegel, die 2 Kugeln innerlich berühren.

Man kann die 4 Punkte A, B, C, D, als die Scheitelpunkte einer dreyeckichten Pyramide anſehen,

und wenn man jede ihrer Grundflächen betrachtet, ſo hat man z. B. für das Dreyeck ABC

$$\overline{Am'} \cdot \overline{Bn'} \cdot \overline{Cr'} = \overline{Ar'} \cdot \overline{Bm'} \cdot \overline{Cp'}$$

woraus nach dem 6ten Lehrſatze folgt, daſs, wenn man ſich 3 Transverſalen An', Br', Cm' vorſtellt, dieſe 3 Transverſalen ſich in einem Punkte ſchneiden werden. Eben ſo iſt es bey den 3 andern Seitenflächen. Wenn man alſo von jedem Scheitel zu dem Durchſchnittspunkt der 3 Transverſalen der gegenüberſtehenden Grundfläche eine Linie zieht, ſo werden dieſe 4 neuen Transverſalen ſich nach dem 12ten Lehrſatze in einem Punkte des Raums ſchneiden.

Von den Linien $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ iſt jede in proportionale Segmente durch die Punkte m, m' n, n', r, r', getheilt; daraus folgt, daſs nach dem 11ten Lehrſatz die 3 Punkte m, n, r, in einer Ebene mit den 3 Punkten p', q', s' liegen. Eben ſo mit den andern.

29. Es ſey ABC (Fig. 34.) ein dem Kreiſe eingeſchriebenes Dreyeck. Durch jeden Scheitelpunkt ziehe ich eine Tangente, die ich verlängere, bis ſie die entgegengeſetzten Seiten in a, b, c ſchneidet, dann werden die Punkte a, b, c in einer graden Linie liegen.

Das Dreyeck ABa giebt

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{Ba}} = \frac{\sin A\hat{a}B}{\sin B\hat{A}a}$$

Das Dreyeck ACa

$$\frac{\overline{Ca}}{\overline{AC}} = \frac{\sin C\hat{A}a}{\sin A\hat{a}C}$$

Multiplicirt man, und bemerkt, dafs $\hat{AaB}$ einerley mit $\hat{AaC}$ ist, und dafs

$$\sin B\hat{A}a = \sin C$$
$$\sin C\hat{A}a = \sin B$$

so hat man

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{Ca}}{\overline{AC} \cdot \overline{Ba}} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

Eben so

$$\frac{\overline{CA} \cdot \overline{Bc}}{\overline{CB} \cdot \overline{Ac}} = \frac{\sin A}{\sin B}$$
$$\frac{\overline{BC} \cdot \overline{Ab}}{\overline{BA} \cdot \overline{Cb}} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

Multiplicirt man diese 3 Gleichungen, so kommt

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb}$$

woraus nach dem ersten Lehrsatz folgt, dafs die 3 Punkte a, b, c in grader Linie liegen.

30. Es sey $ABCD$ (Fig. 35.) ein eingeschriebenes Viereck. Ich verlängere die gegenüberstehenden Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, bis sie sich in m schneiden, eben so $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ bis zu ihrem Durchschnitt in n, und ziehe durch die Endpunkte der einen Diagonale, z. B. $\overline{AC}$, die Tangenten $\overline{Ap}$, $\overline{Cp}$, dann werden die 3 Punkte m, n, p, in grader Linie seyn.

Wenn wir das Dreyeck CDr betrachten, dessen eine Seite $\overline{CD}$ durch m, die andere $\overline{Dr}$ durch n, die dritte Cr durch p geht, so geben die Dreyecke AmD, BmC, ACp, Arp, CDn, Crn:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{Dm}} = \frac{\sin A\hat{m}D}{\sin D\hat{A}m}$$

$$\frac{\overline{Cm}}{\overline{BC}} = \frac{\sin C\hat{B}m}{\sin B\hat{m}C}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{Cp}} = \frac{\sin A\hat{p}C}{\sin C\hat{A}p}$$

$$\frac{\overline{rp}}{\overline{Ar}} = \frac{\sin r\hat{A}p}{\sin A\hat{p}r}$$

$$\frac{\overline{Dn}}{\overline{CD}} = \frac{\sin D\hat{C}n}{\sin D\hat{n}C}$$

$$\frac{\overline{Cr}}{\overline{rn}} = \frac{\sin C\hat{n}r}{\sin n\hat{C}r.}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, und bemerkt, dass

$$\sin A\hat{m}D = \sin B\hat{m}C$$
$$\sin A\hat{p}C = \sin A\hat{p}r$$
$$\sin C\hat{n}r = \sin D\hat{n}C$$
$$\sin D\hat{A}m = \sin D\hat{C}n$$
$$\sin C\hat{B}m = \sin C\hat{A}p.$$

und

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\sin r\hat{A}p}{\sin n\hat{C}r}$$

so hat man

$$\overline{AC} \cdot \overline{Cr} \cdot \overline{Cm} \cdot \overline{rp} \cdot \overline{Dn} = \overline{CD} \cdot \overline{Ar} \cdot \overline{Dm} \cdot \overline{Cp} \cdot \overline{rn} \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

aber

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\sin A\hat{D}C}{\sin C\hat{A}D}$$

$$\frac{\overline{Cr}}{\overline{Ar}} = \frac{\sin C\hat{A}D}{\sin A\hat{C}r}$$

Da nun $A\hat{C}r$ das Supplement von $A\hat{D}C$ ist, so hat man

$$\overline{AC} \cdot \overline{Cr} = \overline{CD} \cdot \overline{Ar}$$

dividirt man (A) damit, so bleibt

$$\overline{Cm} \cdot \overline{rp} \cdot \overline{Dn} = \overline{Dm} \cdot \overline{Cp} \cdot \overline{rn} \quad \ldots . \text{(B)}$$

eine Gleichung unter den Segmenten des Dreyecks, die nach dem ersten Lehrsatz nicht statt haben kann, ohne dass m, n, p, in einer graden Linie liegen.

Weil der Durchschnittspunkt der Tangenten, die durch die Endpunkte von $\overline{AC}$ gehen, auf der Linie $\overline{mn}$ ist, so muss der Durchschnittspunkt der Tangenten, die durch die andere Diagonale $\overline{BD}$ gehen, aus demselben Grunde auch auf $\overline{mn}$ seyn. Also liegen die 4 Punkte m, n, p, q in einer graden Linie.

Die Linie $\overline{mn}$ zwischen den Durchschnittspunkten der Seiten des eingeschriebenen Vierecks, wird durch die Punkte p, q, wo die Seiten des umschriebenen Vierecks sich schneiden, in proportionale Segmente getheilt, eben so $\overline{pq}$ durch m, n; denn das umschriebene Viereck $fghl$ hat zu Diagonalen $\overline{fh}$, $\overline{gl}$, $\overline{pq}$. Es ist also eine jede von ihnen (12.) von den beyden andern in proportionale Segmente getheilt.

Aber aus demſelben Grunde, warum m, n, p, q in einer graden Linie liegen, liegen auch

$$f,\ h,\ h,\ n$$

und

$$l,\ k,\ g,\ m$$

in einer graden Linie, alſo gehen die Diagonalen $\overline{fh}$, $\overline{lg}$, durch die Punkte n, m, alſo iſt $\overline{pq}$ durch m, n, in proportionale Segmente getheilt, und umgekehrt (16.) $\overline{mn}$ durch p, q.

Aus denſelben Gründen ſind die andern Diagonalen $\overline{fh}$, $\overline{gl}$ durch k, n, und k, m ſo getheilt.

Wir können noch daraus ſchlieſsen:

1) daſs die Diagonalen des eingeſchriebenen und umſchriebenen Vierecks ſich in einem Punkte h ſchneiden.

2) Daſs, wenn man aus k ein Perpendikel auf $\overline{mn}$ ſenkt, dieſe Linie durch den Mittelpunkt des Kreiſes gehen wird, ſo wie die, welche man von m, n, ſenkrecht auf $\overline{fh}$, $\overline{gl}$ ſenkte.

3) Daſs der Halbmeſſer des Kreiſes die mittlere Proportionallinie zwiſchen ſeiner Entfernung von k, und ſeiner Entfernung von $\overline{mn}$ iſt u. ſ. w.

Doch würden dieſe Unterſuchungen uns zu weit führen. Ich bemerke nur, daſs, wenn man aus n z. B. die Linien $\overline{ns}$, $\overline{ns'}$ zu den Punkten zieht, wo der Kreis von $\overline{ml}$ geſchnitten wird, dieſe beyden Linien nothwendigerweiſe den Kreis berühren müſſen, weil n auf $\overline{pq}$ liegt, von deren Endpunkten $\overline{pA}$, $\overline{pC}$, $\overline{qB}$, $\overline{qD}$ ausgehen, und die Sehnen $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{ss'}$ ſich in einem Punkte k ſchneiden.

31. Es

31. Es ſey $ABCDEF$ (Fig. 36.) ein dem Kreiſe eingeſchriebenes Sechseck, ich verlängere die gegenüberſtehenden Seiten $\overline{AB}$, $\overline{ED}$, bis ſie ſich in m ſchneiden, eben ſo $\overline{BC}$, $\overline{EF}$, und $\overline{CD}$, $\overline{AF}$ bis zu ihren Durchſchnitten in n, p, dann ſind m, n, p in einer graden Linie.

Betrachten wir das Dreyeck $D\hat{E}r$, deſſen eine Seite $\overline{DE}$ durch m, die andere $\overline{Ar}$ durch n, die dritte $\overline{Dr}$ durch p geht, und ziehen die Diagonalen $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{FD}$, $\overline{FE}$ u. ſ. w., ſo geben uns die Dreyecke BmE, AmD, BnE, Cnr, ADp, Fpr:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{mE}} = \frac{\sin B\hat{m}E}{\sin m\hat{B}E}$$

$$\frac{\overline{mD}}{\overline{AD}} = \frac{\sin m\hat{A}D}{\sin A\hat{m}D}$$

$$\frac{\overline{nE}}{\overline{BE}} = \frac{\sin n\hat{B}E}{\sin B\hat{n}E}$$

$$\frac{\overline{Cr}}{\overline{nr}} = \frac{\sin C\hat{n}r}{\sin n\hat{C}r}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{Dp}} = \frac{\sin A\hat{p}D}{\sin p\hat{A}D}$$

$$\frac{\overline{rp}}{\overline{rF}} = \frac{\sin r\hat{F}p}{\sin r\hat{p}F}$$

Multiplicirt man dieſe Gleichungen, und bemerkt, daß

$$\sin B\hat{m}E = \sin A\hat{m}D$$
$$\sin B\hat{n}E = \sin C\hat{n}r.$$
$$\sin A\hat{p}D = \sin r\hat{p}F$$
$$\frac{\overline{Cr}}{\overline{rF}} = \frac{\sin C\hat{F}r}{\sin F\hat{C}r}$$

und wenn wir den Halbmeſſer des Kreiſes = 1 ſetzen:

$$\sin m\hat{B}E = \overline{AE}$$
$$\sin m\hat{A}D = \overline{BD}$$
$$\sin n\hat{B}E = \overline{CE}$$
$$\sin n\hat{C}r = \overline{BD}$$
$$\sin p\hat{A}D = \overline{DF}$$
$$\sin r\hat{F}p = \overline{AE}$$
$$\sin C\hat{F}r = \overline{CE}$$
$$\sin F\hat{C}r = \overline{DF}$$

ſo haben wir

$$\overline{mD} \cdot \overline{nE} \cdot \overline{rp} = \overline{mE} \cdot \overline{nr} \cdot \overline{Dp}$$

eine Gleichung zwiſchen den Segmenten des Dreyecks *DEr*, die nach dem erſten Lehrſatz nicht ſtatt haben kann, wenn *m*, *n*, *p*, nicht in einer graden Linie liegen.

Es ſey *ABCDEF* (Fig. 37.) ein dem Kreiſe eingeſchriebenes Sechseck; durch jeden Winkelpunkt wollen wir eine Tangente ziehen, um das umſchriebene Sechseck *abcdef* zu bilden, dann werden die 3 Diagonalen *ad*, *be*, *cf* dieſes umſchriebenen Sechsecks ſich alle in einem Punkte *K* ſchneiden.

Verlängere ich die gegenüberstehenden Seiten $\overline{BC}$, $\overline{FE}$ des eingeschriebenen Sechsecks, bis sie sich in n schneiden, und ziehe von n zu den Punkten, wo die Diagonale $\overline{Fc}$ den Kreis schneidet, die Linien $\overline{ns}$, $\overline{ns'}$, so werden diese Linien Tangenten des Kreises seyn. Denn, verlängert man $\overline{cd}$, $\overline{fe}$ bis sie sich in h, $\overline{cb}$, $\overline{fa}$ bis sie sich in g schneiden, so hat man das umschriebene Viereck $cgfh$, also sind $\overline{ns}$, $\overline{ns'}$ Tangenten. Man beweiset eben so, dass, wenn man $\overline{AF}$, $\overline{CD}$ verlängert, bis sie sich in p schneiden (Fig. 36, 37.), die Linien aus p nach t, t' Tangenten seyn müssen; eben so wenn $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, bis zu ihrem Durchschnitt m verlängert werden, und man aus m nach u, u', Linien zieht.

Nun sind aber m, n, p in einer graden Linie (31.), also schneiden sich ss', tt' uu', in einem Punkte, und weil sie der Richtung nach in die Diagonalen des umschriebenen Sechsecks fallen, gilt dasselbe von diesen Diagonalen.

Diesen Satz, der sich wie die vorigen auf alle Kegelschnitte erstreckt, verdanken wir Brianchon, der mehrere interessante Folgerungen daraus gezogen hat (siehe seine Mémoire im 13ten Hefte des Journal de l'Ecole Polytechnique, Tome VI.).

Man sieht leicht, dass alles dies auch auf Figuren anwendbar ist, die auf der Oberfläche einer Kugel durch Bogen grösster Kreise beschrieben sind.

Auch sind diese Sätze auf alle Kegelschnitte anwendbar; da man alle diese Curven als Schatten be-

trachten kann, die ein Kreis zwiſchen einem leuchtenden Punkte und einer beliebig geneigten Ebene gehalten, auf dieſe letztere wirft. Eine Linie alſo, die Tangente einer Curve iſt, muſs es auch am Schatten bleiben; Linien, die in der Figur in proportionale Segmente getheilt ſind, müſſen es ebenfalls im Schatten ſeyn. Man ſieht alſo, welche Ausdehnung man der Theorie der Transverſalen geben kann. Uns genügt es, hier ihre Anfangsgründe entwickelt zu haben.

Zuſätze.

Digitized by Google

I.

zu 131.

Folgende analytiſche Behandlung der merkwürdigen Punkte eines Dreyecks verdanke ich der Güte des Herrn Profeſſor Gauſs. Auch Euler hat ähnliche Unterſuchungen angeſtellt, aber ſeine Reſultate (in den Petersburger Commentarien) konnten ſchon der Methode wegen nicht die einfache Eleganz dieſer Unterſuchungen haben.

Es ſeyen A, A', A'' die 3 Winkelpunkte eines Dreyecks und deren Coordinaten reſpective

$$x, y$$
$$x', y'$$
$$x'', y''$$

Die Coordinaten der Punkte B, B', B'', welche die Seiten $A'A''$, $A''A$, AA' halbiren, werden offenbar ſeyn

$$\tfrac{1}{2}(x' + x''),\ \tfrac{1}{2}(y' + y'')$$
$$\tfrac{1}{2}(x'' + x),\ \tfrac{1}{2}(y'' + y)$$
$$\tfrac{1}{2}(x + x'),\ \tfrac{1}{2}(y + y')$$

Man nehme auf den Linien AB, $A'B'$, $A''B''$ (vorwärts oder rückwärts verlängert, wenn es nöthig iſt), von A, A', A'' ab gezählt, Stücke, welche jenen reſpective proportional ſind, und ſich dazu wie $n : 1$ verhalten. Falls man die Stücke rückwärts nimmt, hat man n als negativ anzuſehen. Dieſer Stücke Endpunkte heiſsen C, C', C'', ſo ſind ihre Coordinaten

$$x + n\tfrac{1}{2}(x' + x'' - 2x),\ y + n\tfrac{1}{2}(y' + y'' - 2y)$$
$$x' + n\tfrac{1}{2}(x'' + x - 2x'),\ y' + n\tfrac{1}{2}(y'' + y - 2y')$$
$$x'' + n\tfrac{1}{2}(x + x' - 2x''),\ y'' + n\tfrac{1}{2}(y + y' - 2y'')$$

oder wenn man

$$1 - n = \alpha$$
$$\tfrac{1}{2} n = \beta$$

ſetzt

$$\alpha x + \beta (x' + x''),\ \alpha y + \beta (y' + y'')$$
$$\alpha x' + \beta (x'' + x),\ \alpha y' + \beta (y'' + y)$$
$$\alpha x'' + \beta (x + x'),\ \alpha y'' + \beta (y + y')$$

Von den Punkten C, C', C'' werden Perpendikel auf $A'A''$, $A''A$, AA', gefällt, man ſucht die Lage der 3 Durchſchnittspunkte dieſer Perpendikel. Es ſeyen die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der beyden letzten Perpendikel

$$\xi, \eta$$

welche man mit Hülfe des folgenden Lehrſatzes beſtimmen wird.

Wenn

$$a, b$$
$$a', b'$$
$$a'', b''$$
$$a''', b'''$$

die Coordinaten von 4 Punkten ſind, und die graden Linien durch den erſten und zweyten Punkt auf der Linie durch den dritten und vierten ſenkrecht ſind, ſo hat man

$\frac{b' - b}{a' - a}$ = tang. der Neigung der erſten Linie gegen die Abſciſſenlinie

$\frac{b''' - b''}{a''' - a''}$ = tang. der Neigung der zweyten Linie gegen die Abſciſſenlinie

und folglich da die eine Neigung um 90° gröſser iſt, als die andere das Product der beyden Tangenten $= -1$, alſo

$$\frac{b'-b}{a'-a}\cdot\frac{b'''-b''}{a'''-a''}=-1$$

In unſerm Falle hat man alſo

$$\frac{\alpha y'+\beta(y''+y)-\eta}{\alpha x'+\beta(x''+x)-\xi}\cdot\frac{y''-y}{x''-x}=-1$$

$$\frac{\alpha y''+\beta(y+y')-\eta}{\alpha x''+\beta(x+x')-\xi}\cdot\frac{y-y'}{x-x'}=-1$$

Hieraus folgt leicht durch Elimination

$$\xi=\frac{(y-y')(y'-y'')(y''-y)(\alpha-\beta)}{y(x''-x')+y'(x-x')+y''(x'-x)}$$
$$+\alpha\cdot\frac{xy(x''-x')+x'y'(x-x'')+x''y''(x'-x)}{y(x''-x')+y'(x-x')+y''(x'-x)}$$
$$+\beta\cdot\frac{y(x''x'-x'x')+y'(xx-x''x')+y''(x'x'-xx)}{y(x''-x')+y'(x-x')+y''(x'-x)}$$

Der Werth von η folgt aus dem Werthe von ξ, wenn man in dieſem alle x, x', x'', mit den entſprechenden y, y', y'' vertauſcht, wie man auch a priori leicht voraus ſehen kann.

Die Coordinaten des Durchſchnitts des erſten und letzten Perpendikels folgen, wie man leicht ſieht, aus ξ und η, wenn man x mit x', und y mit y' vertauſcht, da aber dadurch ξ und η ihre Werthe nicht ändern, indem in beyden offenbar die Coordinaten der Punkte A, A', A'' auf gleiche Art entriren, ſo iſt klar, daſs dieſer zweyte Durchſchnittspunkt mit dem erſten zuſammenfällt, und eben deshalb fällt der dritte Durchſchnittspunkt mit den beyden erſten von ſelbſt gleichfalls zuſammen.

Für den Schwerpunkt ist übrigens offenbar

$$n = \tfrac{2}{3}$$

also

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{3}$$

und daher

$$\xi = \tfrac{1}{3}(x + x' + x'')$$
$$\eta = \tfrac{1}{3}(y + y' + y'')$$

Für den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist

$$n = 1$$

also

$$\alpha = 0$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}$$

Für den Durchschnittspunkt des Perpendikels aus A u. s. w. selbst ist

$$n = 0$$

oder

$$\alpha = 1$$
$$\beta = 0.$$

Der Nenner in dem Werthe von ξ, η ist der doppelte Inhalt des Dreyecks.

Anmerkung des Herausgebers. Es ist, nach einem schönen Theorem des Herrn Professor Gauss, der Inhalt eines Vielecks von n Seiten, wenn die Coordinaten der Winkelpunkte nach der Reihe in einer Richtung gezählt:

$$\begin{array}{cc} x, & y \\ x' & y' \\ \cdots & \cdots \\ n-1 & n-1 \\ x, & y \end{array}$$

sind

$$= \tfrac{1}{2}\{x'(y'-\overset{n-1}{y}) + x''(\overset{2}{y}-y) + x'''(\overset{3}{y}-y') \ldots : + x^{(n-1)}(y-\overset{n-2}{y})\}$$

worüber Er selbst vielleicht, bey einer andern Gelegenheit, uns eine vollständigere Abhandlung schenken wird.

Auch folgt leicht aus diesen Formeln, dass für alle verschiedene Werthe von n die Durchschnittspunkte in Einer graden Linie liegen, und ihre Entfernungen den Unterschieden der Werthe von n proportional sind.

Die Formeln für ξ, η, werden höchst einfach, wenn man die Abscissenlinie durch AA' legt, und ihren Anfang in A setzt, also

$$x = y = y' = o$$

II.

zu 131. *

Dass die Perpendikel in einem Dreyecke, aus den Spitzen auf die gegenüberstehenden Seiten sich in einem Punkte schneiden, kann man sehr einfach so zeigen.

Das gegebene Dreyeck sey BDF, (Fig. 38.) und die erwähnten Perpendikel $\overline{BI}$, $\overline{DG}$, $\overline{FH}$.

Man ziehe durch jeden Scheitelpunkt des Dreyeckes Parallelen mit der gegenüberstehenden Seite, die sich in den Punkten A, C, E, schneiden, es

ſteht folglich $\overline{FH}$ auch auf $\overline{AE}$, $\overline{GD}$ auf $\overline{CE}$, $\overline{BI}$ auf $\overline{AC}$ ſenkrecht, und zwar iſt

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$
$$\overline{ED} = \overline{DC}$$
$$\overline{AF} = \overline{FE}$$

Beſchreibt man nun um das Dreyeck ACE einen Kreis, ſo liegt ſein Mittelpunkt ſowohl in $\overline{BI}$, als in $\overline{GD}$, als in $\overline{FH}$, dieſe 3 Linien müſſen ſich alſo in einem Punkte ſchneiden.

Puiſſant giebt in ſeinem Recueil der propoſitions de Géometrie einen zierlichen analytiſchen Beweis, und fügt einen geometriſchen bey, der nicht daſſelbe Verdienſt hat.

III.

zu 215.

Aus dieſem Satze leitet man leicht her, daſs, wenn

$$\omega = \frac{360°}{4n}$$

$$1 = \sin\omega^2 \left\{ \frac{1}{\sin\omega \cdot \sin 3\omega} + \frac{1}{\sin 3\omega \cdot \sin 5\omega} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{1}{\sin(2n-3)\omega \cdot \sin(2n-1)\omega} \right\}$$

wozu man übrigens eben ſo leicht durch Analyſe gelangt, denn da

$$\cot g\, \omega = \frac{\cos \omega}{\sin \omega}$$
$$\cot g\, 3\omega = \frac{\cos 3\omega}{\sin 3\omega}$$

so ist

$$cotg\ \omega - cotg\ 3\omega = \frac{sin\ 2\omega}{sin\ \omega \cdot sin\ 3\omega}$$

$$cotg\ 3\omega - cotg\ 5\omega = \frac{sin\ 2\omega}{sin\ 3\omega \cdot sin\ 5\omega}$$

$$cotg\ 5\omega - cotg\ 7\omega = \frac{sin\ 2\omega}{sin\ 5\omega \cdot sin\ 7\omega}.$$

setzt man das bis zu $cotg\ (2n-1)\omega = -cotg\ \omega$ fort, und addirt auf beyden Seiten, so erhält man

$$2\,cotg\ \omega = sin\ 2\omega \left\{ \frac{1}{sin\ \omega \cdot sin\ 3\omega} + \frac{1}{sin\ 3\omega \cdot sin\ 5\omega} \cdots + \frac{1}{sin\ (2n-3)\omega \cdot sin\ (2n-1)\omega} \right\}$$

Da nun $\frac{sin\ 2\omega}{2\,cotg\ \omega} = \frac{sin\ \omega \cdot sin\ 2\omega}{2\,cos\ \omega} = sin\ \omega^2$

so folgt eben das, was durch geometrische Betrachtungen aus dem Carnotschen Satze flofs.

Bezeichnet man nun das Product

$$sin\ \omega \cdot sin\ 3\omega \cdot sin\ 5\omega \ldots sin\ (2n-1)\omega$$

mit W, und dasselbe Product, wenn

das erste und zweyte Glied getilgt ist,

mit : . . . $W^{[1,\ 3]}$

das zweyte und dritte Glied getilgt ist,

mit . . . . $W^{[3,\ 5]}$

das dritte und vierte Glied getilgt ist,

mit . . . . $W^{[5,\ 7]}$

so ist

$$W = sin\ \omega^2 \left\{ W^{[1,\ 3]} + W^{[3,\ 5]} \ldots + W^{[2n-3\ 2n-1]} \right\}$$

Um die Summe dieſer Reihe zu erhalten, müſſen wir das Product W etwas genauer unterſuchen, und zwar zuerſt für den Fall, wenn n ungrade iſt.

In dieſem Falle iſt nach gehöriger Subſtitution, und wenn man $\sin n\omega = 1$ ausläſst

$$W = \sin\omega^2 . \sin 3\omega^2 \ldots \sin (n-2)\omega^2$$

Multipliciren wir mit $\sin 2\omega^2 . \sin 4\omega^2 \ldots \sin(n-1)\omega^2$ ſo erhalten wir

$$W \sin 2\omega^2 . \sin 4\omega^2 \ldots \sin(n-1)\omega^2 = \sin\omega^2 . \sin 2\omega^2 . \sin 3\omega^2 \ldots . \sin (n-1)\omega^2$$

Da nun

$$\sin (n-1)\omega = \cos\omega$$
$$\sin (n-2)\omega = \cos 2\omega \text{ u. ſ. f.}$$

ſo verwandelt ſich das zweyte Glied in

$$\sin\omega^2 \cos\omega^2 . \sin 2\omega^2 . \cos 2\omega^2 \ldots \sin \tfrac{1}{2}(n-1)\omega^2 . \cos \tfrac{1}{2}(n-1)\omega^2$$

oder da

$$\sin\omega^2 \cos\omega^2 = (\tfrac{1}{2})^2 \sin 2\omega^2 \text{ u. ſ. w.}$$

ſo erhalten wir die Gleichung

$$W \sin 2\omega^2 . \sin 4\omega^2 \ldots \sin (n-1)\omega^2 = (\tfrac{1}{2})^{n-1} \sin 2\omega^2 . \sin 4\omega^2 \ldots \sin (n-1)\omega^2$$

alſo

$$W = (\tfrac{1}{2})^{n-1}$$

Iſt n grade, ſo haben wir

$$W = \sin\omega^2 \sin 3\omega^2 \ldots \sin (n-1)\omega^2$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit

$$\sin 2\omega^2 . \sin 4\omega^2 \ldots \sin (n-2)\omega^2$$

ſo kommt wie vorhin

$$W \sin 2\omega^2 \ldots \sin (n-2)\omega^2 = (\tfrac{1}{2})^{n-2} \sin \tfrac{1}{2} n\omega^2 . \sin 2\omega^2 . \sin 4\omega^2 \ldots . \sin (n-2)\omega^2$$

oder

$$W = (\tfrac{1}{2})^{n-2} \sin \tfrac{1}{2} n\omega^2$$

Da nun aber $\sin \frac{1}{2} n\omega = \sin 45°$, so haben wir auch hier

$$W = (\tfrac{1}{2})^{n-1}$$

Es ist also allgemein

$$(\tfrac{1}{2})^{n-1} = \sin\omega^2 \{W^{[1,3]} + W^{[3,5]} \ldots . + W^{[2n-3,\ 2n-1]}\}$$

IV.

zu 310.

Die Aufgabe läfst sich auch so fassen:

Es ist die Grundlinie eines Dreyecks gegeben, der Winkel, der dieser Grundlinie gegen über steht, und eine Linie, die diesen Winkel halbirt, man soll daraus das Dreyeck finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 114.) gegeben

$$\overline{HK} = a$$
$$CB = b$$
$$BKC = 2\phi$$

man sucht

$$CK = r$$
$$BK = r'$$

Man lege durch K zwey rechtwinklichte Axen, so dafs die Axe des x in $\overline{HK}$ fällt. Es seyen die

Coordinaten von $C \ldots . x, y$
von $H \ldots . x', y'$
von $B \ldots . x'', y''$

So giebt uns die Entfernung des Punktes C von B, und die Bedingungsgleichung, dafs C, H, B in einer graden Linie liegen, die beyden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (x-x)^2 + (y-y)^2 - bb &= o \\ x(y'-y'') + x'(y''-y) + x''(y-y') &= o \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Da nun aber

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\phi & y &= r \cdot \sin\phi \\ x' &= a & y' &= o \\ x'' &= r' \cdot \cos\phi & y'' &= r' \cdot \sin\phi \end{aligned}$$

so erhalten wir, wenn wir diese Werthe in (A) setzen

$$\begin{aligned} (r-r')^2 \cos\phi^2 + (r+r')^2 \sin\phi^2 - bb &= o \\ 2rr' \cos\phi - a(r+r') &= o \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} r + r' &= \xi \\ r - r' &= \eta \end{aligned}$$

so verwandeln sich die vorigen Gleichungen in

$$\left.\begin{aligned} \eta\eta + tg\,\phi^2 \xi\xi - \frac{bb}{\cos\phi^2} &= o \\ -\eta\eta + \xi\xi - \frac{2a}{\cos\phi}\xi &= o \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

Man braucht nur zu addiren, so kommt

$$\xi\xi - 2a\cos\phi\xi - bb = o$$

also

$$\xi = a\cos\phi \pm \sqrt{(bb + aa\cos\phi^2)}$$

oder wenn man $\frac{bb + aa\cos\phi^2}{\cos\phi^2} = cc$ setzt

$$\xi = \cos\phi\,(a \pm c)$$

Elimi-

Eliminirt man aus (B) $\xi\xi$, so erhält man

$$\eta\eta + 2atg\phi \cdot \xi - bb = o$$

also

$$\eta = \pm \{bb - 2a\,sin\phi\,(a \pm c)\}^{\frac{1}{2}}$$

und endlich

$$r = \tfrac{1}{2} cos\phi\,(a \pm c) \pm \tfrac{1}{2} \{bb - 2a\,sin\phi\,(a \pm c)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$r' = \tfrac{1}{2} cos\phi\,(a \pm c) \mp \tfrac{1}{2} \{bb - 2a\,sin\phi\,(a \pm c)\}^{\frac{1}{2}}$$

V.

zu 330.

Eine mir von Herrn Professor Gauss mitgetheilte Auflösung dieses Problems hat einige Ähnlichkeit mit der hier gegebenen: doch scheint sie mir in mehr als einer Rücksicht noch einfacher. Folgendes sind die Hauptmomente dieser Methode.

Es sey der Halbmesser des Kreises, r, die Coordinaten der Winkelpunkte des Polygons

$$r\,cos\phi,\ r\,sin\phi$$
$$r\,cos\phi',\ r\,sin\phi'$$
$$r\,cos\phi'',\ r\,sin\phi''\ \text{etc.}$$

endlich die Coordinaten der gegebnen Punkte, durch welche die verlängerten Seiten des Polygons gehn, (welche respective den ersten und zweyten Winkelpunkt, den zweyten und dritten u. s. w. verbinden)

$$a\,cos A,\ a\,sin A$$
$$a'\,cos A',\ a'\,sin A'$$
$$a''\,cos A'',\ a''\,sin A''\ \text{etc.}$$

Dann ist, nach dem Grundsatze, dass, wenn drey Punkte, deren Coordinaten $x, y;\ x', y';\ x'', y''$ sind, in einer geraden Linie liegen, die Bedingungsgleichung

$$xy' + x'y'' + x''y - x'y - x''y' - xy'' = o$$

Statt hat,

$$\left.\begin{array}{l} rr\,cos\,\phi\,sin\,\phi' + ra\,cos\,\phi'\,sin\,A + ar\,cos\,A\,sin\,\phi \\ -rr\,cos\,\phi'\,sin\,\phi - ar\,cos\,A\,sin\,\phi' - ra\,cos\,\phi\,sin\,A \end{array}\right\} = o$$

oder

$$r\,sin\,(\phi' - \phi) - a\,sin\,(\phi' - A) + a\,sin\,(\phi - A) = o$$

oder

$$r\,cos\tfrac{1}{2}(\phi' - \phi) = a\,cos\tfrac{1}{2}\,(\phi' + \phi - 2A)$$

Entwickelt man diese beyden Cosinus, dividirt dann mit $cos\tfrac{1}{2}\phi\ cos\tfrac{1}{2}\phi'$, und bezeichnet $tang\tfrac{1}{2}\phi$ mit t, $tang\tfrac{1}{2}\phi'$ mit t',

und $\dfrac{a\,sin\,A}{r - a\,cos\,A} = \alpha$, $\dfrac{r + a\,cos\,A}{r - a\,cos\,A} = \beta$, so wird

$$\text{I. } t = \frac{1 - \alpha t'}{\alpha - \beta t'}$$

Ganz auf ähnliche Art wird, wenn man

$$tang\tfrac{1}{2}\phi'' = t'',\ \frac{a'\,sin\,A'}{r' - a'\,cos\,A'} = \alpha',\ \frac{r + a'\,cos\,A'}{r - a'\,cos\,A'} = \beta'$$

setzt,

$$\text{II. } t' = \frac{1 - \alpha' t''}{\alpha' - \beta' t''} \quad \text{u. s. w.}$$

Man sieht hieraus, dass man so viele Gleichungen erhält, als das Polygon Seiten hat, und dass man durch Verbindung derselben zuletzt auf eine quadratische Gleichung für t kommt.

VI.

zu 334.

Aufgabe.

Es ſind drey Kreiſe der Lage und Gröſse nach gegeben, man ſoll einen vierten beſchreiben, der ſie alle berührt.

Auflöſung.

Man lege durch den Mittelpunkt des einen Kreiſes die ſenkrechten Axen, und nenne die Abſtände von dieſen Linien

Des Mittelpunkts des zweyten Kreiſes .... a, b
des dritten Kreiſes .... a', b'
des geſuchten .... x, y

Die Entfernung des Mittelpunkts des erſten Kreiſes, vom Mittelpunkte des geſuchten heiſse $= z$, ſo iſt

$z - c$ die Entfernung des Mittelpunkts des zweyten vom Mittelpunkte des geſuchten,

$z - c'$ die Entfernung des Mittelpunkts des dritten vom Mittelpunkte des geſuchten;

wo c den Unterſchied der Halbmeſſer des erſten und zweyten, und c' den Unterſchied der Halbmeſſer des erſten und dritten Kreiſes bedeutet.

Wir haben folgende Gleichungen:

$$xx + yy = zz$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (z - c)^2$$
$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = (z - c')^2$$

Setzt man

$$x = z \cos\phi$$
$$y = z \sin\phi$$

so erhält man aus den vorigen Gleichungen

$$aa + bb - cc = 2az\cos\phi + 2bz\sin\phi - 2cz$$
$$a'a' + b'b' - c'c' = 2a'z\cos\phi + 2b'z\sin\phi - 2c'z$$

Dividirt man die erste Gleichung mit $a\cos\phi + b\sin\phi - c$, die zweyte mit $a'\cos\phi + b'\sin\phi - c'$, und zieht sie dann von einander ab, so erhält man

$$\frac{a'a' + b'b' - c'c'}{a'\cos\phi + b'\sin\phi - c'} - \frac{aa + bb - cc}{a\cos\phi + b\sin\phi - c} = o$$

oder wenn wir bezeichnen

$$a'a' + b'b' - c'c' = A'$$
$$aa + bb - cc = A$$
$$(A'a - Aa')\cos\phi + (A'b - Ab')\sin\phi = A'c - Ac'$$

Setzen wir nun

$$A'a - Aa' = R\cos M$$
$$A'b - Ab' = R\sin M$$
$$A'c - Ac' = N$$

so verwandelt sich unsere Gleichung in

$$R\cos(\phi - M) = N$$

worin ausser ϕ alles gegeben ist. Man erhält daraus zwey Werthe für ϕ, unter denen man nach der Art, wie der gesuchte Kreis berühren soll, zu wählen hat.

VII.

zu 341.

Entwickelung der Grundformeln der ſphäriſchen Trigonometrie.

Sind a, b, c die Seiten; A, B, C die gegenüberſtehenden Winkel eines ſphäriſchen Dreyecks, ſo iſt

$$\mathit{cof}\, a = \mathit{cof}\, b \,.\, \mathit{cof}\, c + \mathit{ſin}\, b \,.\, \mathit{ſin}\, c \,.\, \mathit{cof}\, A$$

wie Lagrange, für den Fall, daſs ſowohl b als c kleiner wie 90°, elegant bewieſen hat. Indeſſen läſst ſich der Beweis leicht auf alle andere Fälle ausdehnen.

Es können folgende Fälle eintreten:

I. $b < 90°$

$c < 90°$

Hier gilt der Beweis unmittelbar.

II. $b > 90°$

$c > 90°$

Man verlängere die Seiten b, und c über die Punkte B und C hinaus bis zum Durchſchnitte A', und beſtimme den Werth von a aus der Betrachtung des Dreyecks $A'BC$.

III. $b > 90°$

$c < 90°$

Man verlängere die Seiten b, und a, über die Punkte A und B hinaus bis zum Durchſchnitte C', in dem Dreyeck $C'AB$ iſt ſodann aus Fall I

$$\mathit{cof}\,(180° - a) = \mathit{cof}\, c \,.\, \mathit{cof}\,(180° - b) + \mathit{ſin}\, c \,.\, \mathit{ſin}\,(180° - b)\, \mathit{cof}\,(180° - A)$$

welches mit der Grundformel identiſch iſt.

Mit dieſem Falle iſt $b < 90°$ und $c > 90°$ weſentlich einerley.

IV. $b = 90°$

$A = 90°$

Hier iſt C der Pol von AB alſo nothwendig auch $a = 90°$. Folglich iſt die Formel

$$cof a = cof b \,.\, cof c + fin b \,.\, fin c \,.\, cof A$$

von ſelbſt evident. Mit dieſem Falle iſt $c = 90°$, $A = 90°$ weſentlich einerley.

V. $b = 90°$

$A \gtrless 90°$

1) $c = 90°$. Dann wird A der Pol von c, alſo $b = 90°$, und $a = A$. Die Gleichung

$$cof a = cof b \,.\, cof c + fin b \,.\, fin c \,.\, cof A$$

iſt von ſelbſt evident.

2) $c < 90°$. Hier wird c über B hinaus bis zur Länge von $90°$ fortgeſetzt. Aus der Betrachtung des Dreyecks folgt dann

$$cof a = cof(90° - c)\ cof A + fin(90° - c)\ fin A \,.\, cof 90°$$

oder

$$cof a = fin\ c \,.\, cof A$$

daher die Formel auch in dieſem Falle richtig iſt.

3) $c > 90°$. Hier wird von c der Bogen $90°$ in dem Punkte R abgeſchnitten, dann folgt aus Betrachtung des Dreyecks BRC

$$cof a = cof(c - 90°)\ cof A + fin(c - 90°)\ fin A \,.\, cof 90°$$

oder

$$cof a = fin\ c \,.\, cof A$$

wie im vorigen Fall.

Die Fälle, wo $b < 90°$ oder $b > 90°$, und zugleich $c = 90°$, ſind mit den beyden vorigen weſentlich einerley.

Zählt man alſo alle mögliche Fälle auf, ſo folgt der Beweis, wenn

Beyde Seiten kleiner als 90°	aus	I
Beyde Seiten gröſser als 90°	aus	II
Eine gröſser, die andere kleiner als 90°	aus	III
Beyde $= 90°$	aus	IVu.V.1.
Eine $= 90°$ die andere kleiner	aus	IVu.V.2.
Eine $= 90°$ die andere gröſser	aus	IVu.V.3.

Wir können alſo allgemein annehmen:

(A) . . . $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$

und ebenſo

(2) $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$

dividirt man (A) mit $\sin c$, und multiplicirt (2) mit $\cot g\, c$, und addirt, ſo erhält man

$$\frac{\cos a}{\sin c} = \frac{\cos a \cos c^2}{\sin c} + \sin b : \cos A + \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B$$

alſo

(3) $\cos a \cdot \sin c = \sin b \cdot \cos A + \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B$

ebenſo

(4) $\cos c \cdot \sin a = \sin b \cdot \cos C + \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B$

Multiplicirt man (4) mit $\cos B$, und addirt (3)

(5) $\cos a \cdot \sin c \cdot \sin B^2 = \sin b \cdot \cos A + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$

ebenſo

(6) $\cos a \cdot \sin b \cdot \sin C^2 = \sin c \cdot \cos A + \sin c \cdot \cos B \cdot \cos C$

Multiplicirt man (5) mit $\frac{\sin c}{\cos a}$ und zieht davon (6) mit $\frac{\sin b}{\cos a}$ multiplicirt ab, so erhalten wir

(7) $\sin c^2 . \sin B^2 - \sin b^2 . \sin C^2 = o$

oder

(B) . . . $\sin c . \sin B = \sin b . \sin C$

und wenn man (A, 5) mit $\sin b$ dividirt, und davon (B) mit $\frac{\cos a \sin B}{\sin b}$ multiplicirt abzieht.

(C) . . . $\cos A = -\cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$

endlich wenn man (A, 4) mit $\sin c$ dividirt, und (B) mit $\frac{\cot g C}{\sin c}$ multiplicirt, davon abzieht.

(D) . . . $\cot g c . \sin a - \cot g C . \sin B = \cos a . \cos B$

Aus diesen 4 Grundformeln folgen die sogenannten Neperschen Analogien, und die Abkürzungen, welche durch die Bedingung, dass das sphärische Dreyeck rechtwinklicht seyn soll, angebracht werden können, von selbst.

Man vergleiche mit dieser Entwickelung die von Lagrange im sechsten Heft des Journal de l'Ecole Polytechnique.

VIII.

zu 357.

Auf ähnliche Art wie vorher das Problem der 3 Kreiſe, läſst ſich auch dieſes durch analytiſche Geometrie auflöſen.

Man lege 3 auf einander ſenkrechte Ebenen durch den Mittelpunkt der erſten gegebenen Kugel, ſo daſs die Coordinaten des Mittelpunkts der erſten $o,\ o,\ o$
des Mittelpunkts der zweyten $a,\ b,\ c$
des Mittelpunkts der dritten $a',\ b',\ c'$
des Mittelpunkts der vierten $a'',\ b'',\ c''$
des Mittelpunkts der geſuchten $x,\ y,\ z$

Dann ziehe man vom Mittelpunkt einer jeden Kugel zum Mittelpunkt der geſuchten grade Linien, und nenne die Linie vom Mittelpunkt
der erſten zum Mittelpunkt der geſuchten . . . ζ
der zweyten zum Mittelpunkt der geſuchten . . . $\zeta - e$
der dritten zum Mittelpunkt der geſuchten . . . $\zeta - e'$
der vierten zum Mittelpunkt der geſuchten . . . $\zeta - e''$

wo e, e', e'' die Differenzen des Halbmeſſers der andern gegebenen Kugeln von dem Halbmeſſer der erſten ſind.

Wir haben alſo die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \zeta\zeta &= xx + yy + zz \\ (\zeta - e)^2 &= (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ (\zeta - e')^2 &= (x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 \\ (\zeta - e'')^2 &= (x-a'')^2 + (y-b'')^2 + (z-c'')^2 \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

daraus werden

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz - \zeta e &= \tfrac{1}{2}(aa + bb \\ &\quad + cc - ee) = \tfrac{1}{2}A \\ a'x + b'y + c'z - \zeta e' &= \tfrac{1}{2}(a'a' + b'b' \\ &\quad + c'c' - e'e') = \tfrac{1}{2}A' \\ a''x + b''y + c''z - \zeta e'' &= \tfrac{1}{2}(a''a'' + b''b'' \\ &\quad + c''c'' - e''e'') = \tfrac{1}{2}A'' \end{aligned}\right\} \ldots (B)$$

Multiplicirt man die erſte mit b', die zweyte mit $-b$, und addirt, multiplicirt wieder die erſte mit b'', und die dritte mit $-b$, und addirt, ſo kommt

$$\left.\begin{aligned} (ab' - a'b)x + (cb' - c'b)z - (eb' - e'b)\zeta \\ = \tfrac{1}{2}(Ab' - A'b) \\ (ab'' - a''b)x + (cb'' - c''b)z - (eb'' - e''b)\zeta \\ = \tfrac{1}{2}(Ab'' - A''b) \end{aligned}\right\} \ldots (C)$$

Multiplicirt man die erſte mit $(cb'' - c''b)$, die zweyte mit $(c'b - cb')$ und addirt, ſo kommt

$$\{(cb'' - c''b)(ab' - a'b) - (cb' - c'b)(ab'' - a''b)\}x -$$
$$\{(cb'' - c''b)(eb' - b'e) - (cb' - c'b)(eb'' - b''e)\}\zeta =$$
$$\tfrac{1}{2})cb'' - c''b)(Ab' - A'b) - \tfrac{1}{2}(cb' - c'b)(Ab'' - A''b)$$

verfährt man ebenſo mit $c', -c$, $c'', -c$ u. ſ. w., ſo leitet man noch folgende Gleichungen ab, wo wir die bekannten Coefficienten in der ſchon entwickelten mit α, β, γ, in den noch zu entwickelnden, durch dieſelben Buchſtaben mit Accenten bezeichnen wollen:

$$\alpha x - \beta\zeta = \gamma$$
$$\alpha' y - \beta'\zeta = \gamma'$$
$$\alpha'' z - \beta''\zeta = \gamma$$

alſo

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\gamma + \beta\zeta}{\alpha} \\ y &= \frac{\gamma' + \beta'\zeta}{\alpha'} \\ z &= \frac{\gamma'' + \beta''\zeta}{\alpha''} \end{aligned}\right\} \ldots \text{(D)}$$

Setzen wir dieſe Werthe in die Gleichung

$$\zeta\zeta = xx + yy + zz$$

ſo kommt

$$\zeta\zeta - \frac{m}{n}\zeta - \frac{m'}{n} = o \ldots \text{(E)}$$

wo m, m', n bekannt ſind, und zwar iſt

$$m = 2(\gamma\beta\alpha'\alpha'\alpha''\alpha'' + \gamma'\beta'\alpha\alpha\alpha''\alpha'' + \gamma''\beta''\alpha'\alpha'\alpha\alpha)$$

$$m' = \alpha'\alpha'\alpha''\alpha''\gamma\gamma + \alpha\alpha\alpha''\alpha''\gamma'\gamma' + \alpha\alpha\alpha'\alpha'\gamma''\gamma''$$

$$n = \alpha\alpha\alpha'\alpha'\alpha''\alpha'' - (\alpha\alpha\alpha'\alpha' + \alpha\alpha\alpha''\alpha'' + \alpha'\alpha'\alpha''\alpha'')$$

wir haben alſo

$$\zeta = \frac{1}{2n}\{m \pm r(4nm' + mm)\}$$

Setzt man dieſen Werth in die Gleichungen (D), ſo erhält man unmittelbar die Coordinaten des Mittelpunkts der geſuchten Kugel:

$$x = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha n}\{m \pm r(4nm' + mm)\}$$

$$y = \frac{\gamma'}{\alpha'} + \frac{\beta'}{2\alpha' n}\{m \pm r(4nm' + mm)\}$$

$$z = \frac{\gamma''}{\alpha''} + \frac{\beta''}{2\alpha'' n}\{m + r(4nm' + mm)\}$$

Der Halbmeſſer der geſuchten Kugel folgt eben ſo unmittelbar aus ζ, wenn man nur den Halbmeſſer der erſten davon abzieht, oder dazu addirt, nachdem dieſe erſte von innen oder auſsen berührt wird.

No. 1. Der Correſpondence ſur l'Ecole polytechnique enthält geometriſche Unterſuchungen über Berührungen von Kugeln, und eine daraus hergeleitete Auflöſung dieſes Problems. Das Problem von den 3, durch einen 4ten zu berührenden Kreiſen, wird dort auf folgendes Problem zurückgebracht:

„unter allen Kugeln, die 3 gegebene berühren „können, diejenige zu finden, deren Mittelpunkt „mit den Mittelpunkten der andern 3 in einer „Ebene liegt.“

Biot, Malus, Berge, Dupuis, Briſſon u. ſ. w., haben ſich mit dieſen Problemen beſchäftigt. Ihre Arbeiten liegen im Mſc. in der Ecole polyt.

In No. 5. pag. 193. iſt eine einfache geometriſche Auflöſung von Cauchy enthalten.

Im Januarſtück dieſes Jahrs (1810), welches ich ſo eben erhalte, iſt noch eine analytiſche Auflöſung von Français, die ich ihrer Eleganz willen, und weil die Correſpondence ſur l'Ecole polyt. wohl in den Händen der wenigſten Leſer iſt, hier mittheile:

Es ſeyen

r, r', r'', r''' die Halbmeſſer der 4 gegebenen Kugeln,

$2a$, $2b$, $2c$ die Entfernungen des Mittelpunkts der erſten Kugel von den Mittelpunkten der andern.

R der Halbmeſſer der geſuchten Kugel,

$\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ die Entfernungen ihres Mittelpunkts von den Mittelpunkten der 4 gegebenen Kugeln,

ſo

ſo hat man

$$\left.\begin{aligned} R \mp r &= \varrho \\ R \mp r' &= \varrho' \\ R \mp r'' &= \varrho'' \\ R \mp r''' &= \varrho''' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wir wollen hier nur die oberen Zeichen betrachten, da die untern eben ſo behandelt werden.

Zieht man die erſte Gleichung von den andern ab, ſo erhält man

$$\begin{aligned} r - r' &= \varrho' - \varrho \\ r - r'' &= \varrho'' - \varrho \\ r - r''' &= \varrho''' - \varrho \end{aligned}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} r - r' &= 2d \\ r - r'' &= 2d' \\ r - r''' &= 2d'' \end{aligned}$$

ſo erhält man

$$\left.\begin{aligned} \varrho' &= \varrho + 2d \\ \varrho'' &= \varrho + 2d' \\ \varrho''' &= \varrho + 2d'' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Man hat aber auch

$$\left.\begin{aligned} \varrho'\varrho' &= \varrho\varrho + 4aa - 4a\varrho \, cof(\varrho, a) \\ \varrho''\varrho'' &= \varrho\varrho + 4bb - 4b\varrho \, cof(\varrho, b) \\ \varrho'''\varrho''' &= \varrho\varrho + 4cc - 4c\varrho \, cof(\varrho, c) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und aus Verbindung der Gleichungen (3) und (2)

$$\left.\begin{aligned} \varrho\,(a \, cof(\varrho, a) + d) &= aa - dd \\ \varrho\,(b \, cof(\varrho, b) + d') &= bb - d'd' \\ \varrho\,(c \, cof(\varrho, c) + d'') &= cc - d''d'' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dieſe Gleichung ſtellt 3 zweytheilige Hyperboloïden vor, die im Mittelpunkte der erſten Kugel

einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt haben, und deren Umdrehungsaxen die Linien ſind, welche den Mittelpunkt dieſer Kugel mit den Mittelpunkten der 3 andern verbinden.

d, d', d'' ſind die halben groſsen Axen dieſer Hyperboloïden, und a, b, c die Entfernungen ihrer Mittelpunkte von den Brennpunkten. Die gemeinſchaftlichen Durchſchnitte ihrer Oberflächen geben die Auflöſung der Aufgabe. Wir werden aber gleich ſehen, daſs man dieſe Hyperboloïden nicht zu conſtruiren braucht, ſondern daſs die Conſtruction der Aufgabe durch Lineal und Zirkel geſchehen kann.

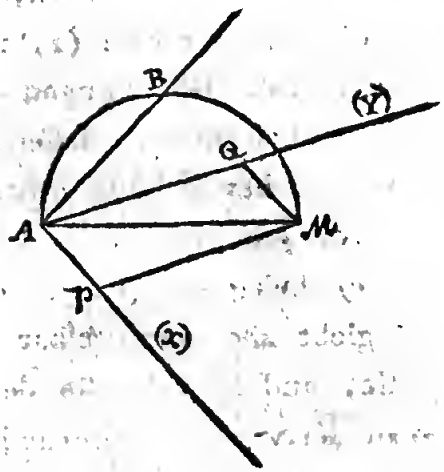
Eliminirt man ϱ aus den Gleichungen (4), ſo erhält man folgende 3, wovon jede aus den beyden andern hergeleitet werden kann,

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)\cos(\varrho,a)-\left(\frac{aa-dd}{a}\right)\cos(\varrho,b) &= \frac{d'}{b}\left(\frac{aa-dd}{a}\right)-\frac{d}{a}\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)\\
\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)\cos(\varrho,b)-\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)\cos(\varrho,c) &= \frac{d''}{c}\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)-\frac{d'}{b}\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)\\
\left(\frac{aa-dd}{a}\right)\cos(\varrho,c)-\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)\cos(\varrho,a) &= \frac{d}{a}\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)-\frac{d''}{c}\left(\frac{aa-dd}{a}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Jede dieſer Gleichungen ſtellt einen ſenkrechten Kegel vor, der ſeinen Scheitelpunkt im Mittelpunkt der erſten gegebenen Kugel hat. Ihre Durchſchnitte zu zweyen, geben zwey Linien, wodurch 2 verſchiedene Lagen von ϱ beſtimmt werden. Wir wol-

len die Conſtruction des Kegels, den die erſte Gleichung vorſtellt, andeuten; die beyden andern werden auf ähnliche Weiſe conſtruirt.

Die Linien a, b, c in ihrer gegebenen Lage ſollen die 3 Axen der x, y, z vorſtellen, ſo werden die Coordinaten irgend eines Punktes ihnen reſpective parallel ſeyn.



Auf der Axe der x nehme ich eine Entfernung $AP = \frac{bb - d'd'}{b}$ auf der Axe der y $AQ = \frac{aa - dd}{a}$, welches die Coordinaten des Punktes M ſind. Durch dieſen Punkt und den Urſprung ziehe AM die Axe des geſuchten Kegels. Ueber AM beſchreibe ich einen halben Kreis, in dem ich die Sehne AB abſchneide $= \frac{d'}{b}\left(\frac{aa - dd}{a}\right) - \frac{d}{a}\left(\frac{bb - d'd'}{b}\right)$. Die Linie AB iſt diejenige, welche, indem ſie ſich um AM dreht, den Kegel beſchreibt, der durch die erſte der Gleichungen (5) vorgeſtellt wird.

Die Axen der andern Kegel findet man in der Ebene der yz, und in der Ebene des xz. Die Linien, durch deren Umdrehung ſie entſtehen, findet man ebenſo wie AB, auch kann man die Durchſchnitte zweyer dieſer Kegel leicht durch Lineal und Zirkel erhalten.

Man findet zwey Auflöſungen für die Lage von ϱ, weil die Gleichungen (2) bis auf das Zeichen dieſelben ſind, man mag nun alle obern, oder alle untern Zeichen in die Gleichungen (1) nehmen. Da wir aber die Quadrate der Gleichungen (2) gebrauchten, die beyde Zeichen in ſich faſſen, ſo muſsten wir die Auflöſung für beyde Fälle erhalten.

Iſt die Lage von ϱ beſtimmt, ſo ſind $cof(\varrho, a)$, $(cof\,\varrho, b)$, $cof(\varrho, c)$ bekannt. Irgend eine von den Gleichungen (4) giebt alſo unmittelbar die abſolute Länge dieſer Linie, und folglich die des Halbmeſſers R. Man kann in der vorigen Conſtruction einen der Kegel durch eine Ebene erſetzen, die durch den Urſprung geht, denn da jede Combination der Gleichungen (5) eine von ihnen erſetzen kann, ſo braucht man nur die erſte mit $\frac{d''}{c}$, die zweyte mit $\frac{d,}{a}$ die dritte mit $\frac{d'}{b}$ zu multipliciren, und ſie dann zu addiren, um

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} cof(\varrho,a)\left\{\frac{d''}{c}\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)-\frac{d'}{b}\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)\right\} \\ +cof(\varrho,b)\left\{\frac{d}{a}\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)-\frac{d''}{c}\left(\frac{aa-dd}{a}\right)\right\} \\ +cof(\varrho,c)\left\{\frac{d'}{b}\left(\frac{aa-dd}{a}\right)-\frac{d}{a}\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)\right\} \end{array}\right\}=o$$

zu erhalten, d. h. die Gleichung einer Ebene, die durch den Urſprung geht, und einen der Kegel (5) erſetzen kann.

Stellt man ſie der Kürze wegen durch

$$l\,cof(\varrho, a) + m\,cof(\varrho, b) + n\,cof(\varrho, c) = o \ldots (A)$$

vor, und ſetzt

$$ll + mm + nn + 2lm\,cof(a, b) + 2ln\,cof(a, c) + 2mn\,cof(b, c) = KK$$

ebenſo die Winkel, welche dieſe Ebene mit den 3 coordinirten Ebenen macht $= (A, ab)$, (A, ac), (A, bc), ſo hat man

$$cof(A, bc) = \frac{l \,.\, ſin\,(a, bc)}{K}$$

$$cof(A, ac) = \frac{m \,.\, ſin\,(b, ac)}{K}$$

$$cof(A, ab) = \frac{n \,.\, ſin\,(c, ab)}{K}$$

Dieſe Ebene iſt alſo ganz ihrer Lage nach gegeben, und ihr Durchſchnitt mit einem der Kegel (5) giebt die beyden Richtungen von ϱ.

Errata.

S. 3 Zeile 5. u. ſtatt zu lies in.
7 — 13. o. — Punktionen — Functionen.
12 — 10. o. — den — die.
42 — 6. u. — im — ein.
44 — 13. o. — in — zu
60 — 10. o. muſs das Comma hinter Summe weg.
— 6. u. ſtatt des Products — der Producte.
62 — unten — Ffächeninhalt — Flächeninhalt.
73 — 5. u. — Kugelſchnitt — Kegelſchnitt.
101 ſqq. für entgegengeſetzte Winkel — gegenüberſtehende Winkel.
153 — 1. o. ſtatt Gunſs — Gauſs.
157 — 6. o. — der — die.
168 — 13. o. — grade — gradlinichte.
169 ſq. für gradlinigt — gradlinicht.
189 — 6. u. ſtatt Grade, Linien — grade Linien.
209 — 3. o. — Kugelſchnitt — Kegelſchnitt.
213 — 2. o. — zu — in.
221 — 10. u. — zu — in
247 — 5. o. — in das Franzöſiſche — in das Franzöſiſche überſetzt.
285 ſqq. für Bögen lies Bogen.
324 — 7. u. ſtatt noch leichtere — nach leichten.
330 — 6. u. — zu — in
364 — 10. o. — Recueil der — Recueil des

669968

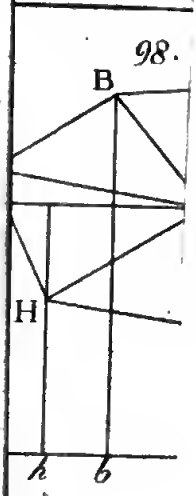
Leipzig, gedruckt bey J. G. Neubert.

B

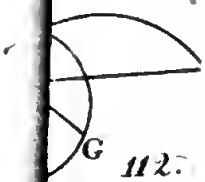
m

A
B

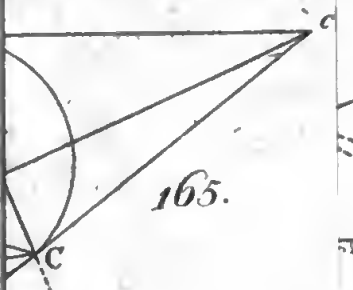
92


98.
B
H
h
b

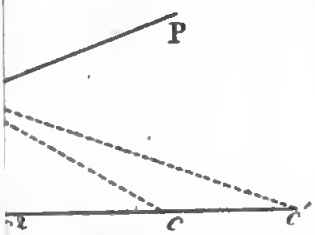
A
m
B


G
112.

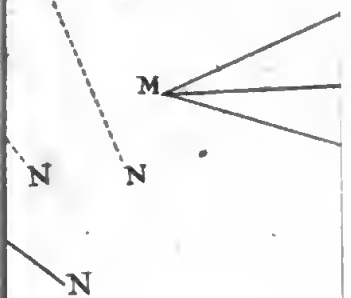
B
D
B
s
r
q

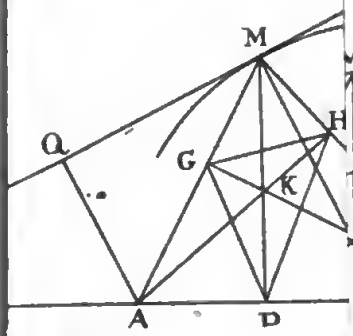


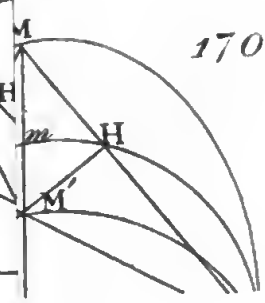
165.



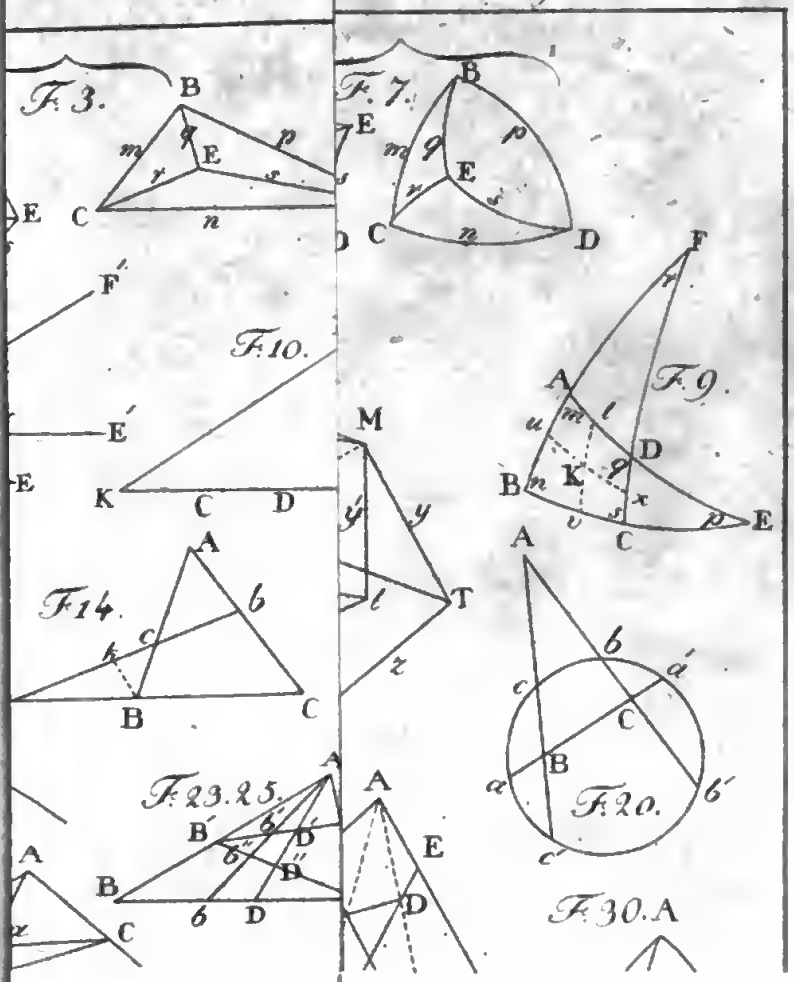
167.

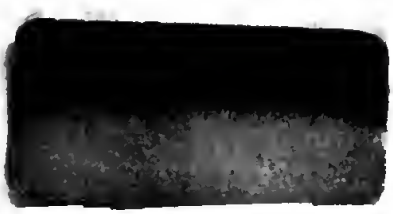






170.


F. 3.
F. 7.
F. 9.
F. 10.
F. 14.
F. 23. 25.
F. 20.
F. 30. A



Digitized by Google